科学技術計算ライブラリ
ASL ユーザーズガイド
＜基本機能編 第6分冊＞

は し が き

本書は, 科学技術計算ライブラリ ASL (Advanced Scientific Library) の概念, 機能, 利用方法などについて説明したものです.
当製品に対応する説明書は 7 分冊からなっており, 構成は次のとおりです. このうち本書は, 基本機能第 6 分冊について記述したものです.

基本機能 第 1 分冊

章	タイトル	内　容
1	使用の手引き	本説明書の構成, 各項目の見方, および使用上の制限事項などの説明
2	格納モードの変換	配列データの格納モードの変換に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
3	基本行列演算	行列の基本演算に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
4	固有値・固有ベクトル	実行列, 複素行列, 実対称行列, エルミート行列, 実対称バンド行列, 実対称 3 重対角行列, 実対称スパース行列, エルミートスパース行列の標準固有値問題および実行列, 実対称行列, エルミート行列, 実対称バンド行列の一般化固有値問題に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明

基本機能 第 2 分冊

章	タイトル	内　容
1	使用の手引き	本説明書の構成, 各項目の見方, および使用上の制限事項などの説明
2	連立 1 次方程式 (直接法)	実行列, 複素行列, 正値対称行列, 実対称行列, エルミート行列, 実バンド行列, 正値対称バンド行列, 実 3 重対角行列, 実上三角行列, 実下三角行列の連立 1 次方程式に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明

基本機能 第 3 分冊

章	タイトル	内　　　容
1	使用の手引き	本説明書の構成, 各項目の見方, および使用上の制限事項などの説明
2	フーリエ変換とその応用	1 次元, 2 次元および 3 次元の複素ならびに実フーリエ変換, 1 次元, 2 次元および 3 次元の畳み込み, 相関, パワー・スペクトル解析, ウェーブレット変換およびラプラス逆変換に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明

基本機能 第 4 分冊

章	タイトル	内　　　容
1	使用の手引き	本説明書の構成, 各項目の見方, および使用上の制限事項などの説明
2	微分方程式とその応用	〔常微分方程式初期値問題〕 連立高階, 陰的連立, 行列型, スティフ問題の連立高階, 連立 1 階, 高階常微分方程式 〔常微分方程式境界値問題〕 連立高階, 連立 1 階, 高階, 線形高階, 線形 2 階常微分方程式 〔積分方程式〕 第 2 種フレドホルム型, 第 1 種ボルテラ型積分方程式 〔偏微分方程式〕 2 次元および 3 次元の非同次ヘルムホルツ方程式 に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
3	数値微分	1 変数関数および多変数関数の数値微分に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
4	数値積分	有限区間, 半無限区間, 全無限区間, 2 次元有限区間, 多次元有限区間の数値積分に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
5	補間・近似	補間, 曲面補間, 最小二乗近似, 最小二乗曲面近似, チェビシェフ近似に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
6	スプライン関数	3 次スプライン, 双 3 次スプラインおよび B–スプラインを用いた補間, 平滑化, 数値微分, 数値積分に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明

基本機能 第 5 分冊

章	タイトル	内　　　　容
1	使用の手引き	本説明書の構成, 各項目の見方, および使用上の制限事項などの説明
2	特殊関数	ベッセル関数, 変形ベッセル関数, 球ベッセル関数, ベッセル関数に関連した関数, ガンマ関数, ガンマ関数に関連した関数, 楕円関数, 初等関数の不定積分, ルジャンドル陪関数, 直交多項式, その他の特殊関数に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
3	ソート・順位付け	ソート, 順位付けに関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
4	方程式の根	代数方程式, 非線形方程式, 連立非線形方程式の根に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
5	極値問題・最適化	制約なし関数の極小化, 制約なし関数二乗和の極小化, 制約付き 1 変数関数の極小化, 制約付き多変数関数の最小化, 最短路問題に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明

基本機能 第 6 分冊

章	タイトル	内　　　　容
1	使用の手引き	本説明書の構成, 各項目の見方, および使用上の制限事項などの説明
2	乱数の検定	一様乱数の検定, 分布乱数の検定に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
3	確率分布	連続分布, 離散分布に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
4	基礎統計量	基礎統計量, 分散共分散, 相関係数に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
5	推定と検定	区間推定, 検定に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
6	分散分析・実験計画	1 元配置, 2 元配置, 多元配置, 乱塊法, グレコ・ラテン方格法, 累積法に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
7	ノンパラメトリック検定	χ^2 分布による検定, その他分布による検定に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
8	多変量解析	主成分分析, 因子分析, 正準相関分析, 判別分析, クラスタ分析に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
9	時系列分析	自己相関・相互相関, 自己共分散・相互共分散, 平滑化・需要予測に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明
10	回帰分析	線形回帰, 非線形回帰に関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明

共有メモリ並列機能

章	タイトル	内　　容
1	使用の手引き	本説明書の構成, 各項目の見方, および使用上の制限事項などの説明
2	基本行列演算	実行列および複素行列の積を求めるサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法の説明
3	連立 1 次方程式 (直接法)	実行列, 複素行列, 実対称行列, エルミート行列の連立 1 次方程式（直接法）に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
4	連立 1 次方程式 (反復法)	実正値対称スパース行列, 実対称スパース行列, 実非対称スパース行列の連立 1 次方程式（反復法）に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用法および使用例の説明
5	固有値・固有ベクトル	実対称行列およびエルミート行列の固有値問題に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
6	フーリエ変換とその応用	1 次元, 2 次元および 3 次元の複素ならびに実フーリエ変換, 2 次元および 3 次元の畳み込み, 相関, パワー・スペクトル解析に関するサブルーチンのアルゴリズム, 使用方法および使用例の説明
7	ソート	ソートに関するサブルーチンの使用方法および使用例の説明

2023 年　3 月　ASL 付属説明書　3.0.0-230301

備考 (1) 本書に説明しているすべての機能は, プログラムプロダクトであり, ASL 1.1 に対応しています.

(2) 製品名などの固有名詞は, 各メーカーの登録商標または商標です.

(3) 本ライブラリは, 最新の数値計算技法を取り入れ, 開発されたものです. 従って, 最新の技術を維持する目的から, 改良または新しく追加されたサブルーチンが, 既存のサブルーチンの機能を包含し, かつ, これまで以上の高速性能が得られる場合には, 既存のサブルーチンを削除することもあります.

目 次

第 1 章　使用の手引

1.1　概　説

1.1.1　科学技術計算ライブラリ ASL の概要

科学技術計算ライブラリ ASL（Advanced Scientific Library）は, 数値解析プログラムの作成を強力に支援する数学ライブラリである．ASL では広範な数値解析分野で頻出するプログラムを提供しており, それらは VE(Vector Engine) 上で優れた実行速度と精度を実現するための高度な最適化が適用されている． ASL を用いることによって, 難解な数値計算アルゴリズムの詳細に煩わされることなく高度な数値解析プログラムを作成することができ, 数値解析プログラム開発の生産性を大幅に改善することができる．

ASL は, 基本機能, 共有メモリ並列機能で構成される．機能分類と本マニュアルの分冊との対応を表 1−1 に示す．

表 1−1　ASL　の機能分類

機能分類	分冊
基本機能	第 1〜6 分冊
共有メモリ並列機能	第 7 分冊

1.1.2　ASL　の特長

ASL の特長は, 次のとおりである．

(1) ハードウェア性能を十分発揮できるように設計しており, コンパイラの最適化機能を用いて作成した．

(2) 行列を扱うサブルーチンでは, 行列の種類 (対称行列, エルミート行列など) に応じて最適に処理を行えるように, 専用のサブルーチンをそれぞれ提供している．一般に, 専用のサブルーチンを用いて処理を行った方が, 処理性能を向上したり, 必要なメモリ容量を節約したりすることができる．

(3) 処理手順に従ってモジュール化を行い, コンポーネントサブルーチンごとの信頼性向上に努めるとともに, システム全体の効率化, 信頼性向上を図った．

(4) サブルーチンを利用した後の エラーインディケータの番号が体系的に決めてあるので, エラー情報を把握しやすい．

1.2　ライブラリの種類

ASL には, 32 ビット整数型ライブラリと 64 ビット整数型ライブラリがある．32 ビット整数型ライブラリに含まれるサブルーチンの整数型の引数は, 32 ビット (4 バイト) 整数型である．一方, 64 ビット整数型ライブラリに含まれるサブルーチンの整数型の引数は, 64 ビット (8 バイト) 整数型である．また, サブルーチンの実数型の引数によってサブルーチン名が異なる．サブルーチン名については, 1.4 を参照のこと．

表 1−2　ASL で提供しているライブラリの種類

変数の大きさ (バイト)		引数の型宣言文	通称	ライブラリの種類
整数型	実数型			
4	8	INTEGER(4) REAL(8)	32 ビット整数型倍精度サブルーチン	32 ビット整数型ライブラリ (リンクオプション：-lasl_sequential)
4	4	INTEGER(4) REAL(4)	32 ビット整数型単精度サブルーチン	
8	8	INTEGER(8) REAL(8)	64 ビット整数型倍精度サブルーチン	64 ビット整数型ライブラリ (リンクオプション：-lasl_sequential_i64)
8	4	INTEGER(8) REAL(4)	64 ビット整数型単精度サブルーチン	

（注 1） 機能によっては, 4 種類全てをサポートしているとは限らない．その場合, 個別の説明の注意事項の欄に記述するので注意されたい．

（注 2） INTEGER(4) および REAL(4) で型宣言する場合, “(4)” は省略可.

1.3 マニュアルについて

ここでは本マニュアルの第 2 章以降の構成について述べる.
第 2 章以降は ASL で用いられるサブルーチンとその機能, 使用方法の説明を行う.

1.3.1 『概　要』

各章の第 1 節では, 概要として各サブルーチンに対応する機能の説明を行っている.

1.3.2 サブルーチン説明文の構成

各章の第 2 節では, サブルーチンごとに以下の順で説明している.

(1) 機能

(2) 使用法

(3) 引数

(4) 制限条件

(5) エラーインディケータ

(6) 注意事項

(7) 使用例

各項目は次に述べる原則に従って記述されている.

1.3.3 各項目の内容

(1) **機 能**

この項目では, サブルーチンの目的とする機能について簡単に述べてある.

(2) **使用法**

この項目では, サブルーチン名とその引数の順序について記述してある.
引数の並べ方は, 原則として次のように決められている.

CALL　サブルーチン名 (入力引数, 入出力引数, 出力引数, ISW, ワーク, IERR)

ここで, ISW は処理の手順を指定するための入力引数であり, IERR は エラーインディケータである. ただし, 入力引数と入出力引数の順序が逆の場合もある. さらに次の規則にしたがっている.

- 配列は重要度に応じてできるだけ左方によせる.
- 配列名に続けて配列の大きさをそえる. 同じ大きさをもつ配列が複数個あるときは, その最初の配列名に続けてその大きさを引数として与え, 2 番目以降の配列からは, その大きさは引数として与えない.

(3) **引　数**

(2) 項で記述された引数について, 順番に説明されている. その形式は以下のように統一されている.

引数	型	大きさ	入出力	内 容
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

(a) 引数

引数が記載されている.

(b) 型

引数のデータの型を示す. 次の略記号のいずれかに示されている.

I ：整数型

D ：倍精度実数型

R ：単精度実数型

Z ：倍精度複素数型

C ：単精度複素数型

整数型の引数には 64 ビット整数型と 32 ビット整数型とがある. サブルーチンの整数型引数が 64 ビット整数型であるのか 32 ビット整数型であるのかは, そのサブルーチンが 64 ビット整数型であるか 32 ビット整数型であるか, つまりライブラリの種類によって決められる (1.2 参照). ユーザプログラムにおいて引数の型を宣言する際は, 32 ビット整数型の引数は`INTEGER(4)`, 64 ビット整数型の引数は`INTEGER(8)` を用いて宣言する必要がある.

(c) 大きさ

指定された引数の必要な大きさを示す. 2 以上を指定した場合には, このサブルーチンを利用したプログラム側で, その必要な領域を確保しなければならない.

1 ：変数であることを示す.

N ：要素が N 個の 1 次元配列であることを示す. この配列が指定された直後にその大きさを示す引数 N が定義される. ただし大きさ N が以前に定義された配列の大きさを規定している場合には省略される. このほかに数値のみにて指定する場合や, $3 \times \mathrm{N}$ や $\mathrm{N} + \mathrm{M}$ のように, 積または和の形で表記する場合もある.

M, N ：M 行 N 列の 2 次元の配列であることを示す. この配列が指定される前にこの M と N が定義されていない場合は, この配列の直後にその大きさを示す引数 M または N が定義される.

(d) 入出力

引数の内容説明が入力時であるか出力時であるかを示す.

i. 「入力」とだけある場合：

このサブルーチンを利用したプログラムに制御がもどったときに, 引数の入力時の情報は保存されている. 入力時の情報は特に断らない限り, 利用者が与えなければならない.

ii. 「出力」とだけある場合：

引数には, サブルーチン内で計算された結果が出力される. 入力時には何も入れなくてよい.

iii. 「入力」と「出力」の両方に説明がある場合：

サブルーチンに制御がわたる前とサブルーチンから制御がもどった後で, この引数の内容に変化がある場合である. 入力時の情報は特に断らない限り, 利用者が与えなければならない.

iv. 「ワーク」とある場合：

サブルーチン内で演算を行うときに利用する領域であること示す. サブルーチンを利用するプログラム側で, 指定された大きさの作業領域を確保しなければならない. なお, 次の計算に流用するために, 作業領域の内容を保存しておく必要がある場合がある.

(e) 内 容

入力時あるいは出力時に, 引数が保持している情報について説明される.

- 「引 数」の説明の例を次に示す.

例 実行列の LU 分解と条件数を求めるサブルーチン (DBGMLC, RBGMLC) の使用法は以下のとおりである.

倍精度サブルーチン:

CALL DBGMLC (A, LNA, N, IPVT, COND, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RBGMLC (A, LNA, N, IPVT, COND, W1, IERR)

この場合の引数の説明は次のようになる.

表 1–3 引数の例

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	$\left\{\begin{array}{l}D\\R\end{array}\right\}$ 注	LNA, N	入 力	実行列 A(2 次元配列型)
				出 力	$A = LU$ と分解した時の単位上三角行列 U および下三角行列 L
2	LNA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	N	I	1	入 力	行列 A の次数 n
4	IPVT	I	N	出 力	ピボッティング情報 IPVT(i): i 段目の処理において行 i と交換した行の番号
5	COND	$\left\{\begin{array}{l}D\\R\end{array}\right\}$	1	出 力	条件の逆数
6	W1	$\left\{\begin{array}{l}D\\R\end{array}\right\}$	N	ワーク	作業領域
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

このサブルーチンを利用するには, まず, 引数として使用する配列 A, IPVT および W1 を, 呼び出し元の利用者プログラム側でアロケートする必要がある. それらはそれぞれ, $\left\{\begin{array}{l}\text{倍精度}\\ \text{単精度}\end{array}\right\}$ 注 実数型で大きさ (LNA, N), 整数型で大きさ N, $\left\{\begin{array}{l}\text{倍精度}\\ \text{単精度}\end{array}\right\}$ 実数型で大きさ N の配列である.

また, 64 ビット整数版を利用する場合には, 整数型引数 (LNA,N,IPVT,IERR) はすべて`INTEGER`ではなく`INTEGER(8)`を用いて宣言する必要がある.

注 DBGMLC のときには倍精度実数型 (略記号 D), RBGMLC のときには実数型 (略記号 R) で宣言することを意味する. 以下, 本文中で特に断らない限り中括弧 {} 等の使用法は, 同様の扱いとする.

このサブルーチンを使用するときには, A, LNA および N にデータを格納しておかなければならない. サブルーチン内では, 与えられた行列の LU 分解と条件数の算出が行われ, 結果が配列 A と変数 COND に格納される. また, 後続サブルーチンで利用するため, ピボッティング情報が IPVT に格納される.

IERR は, 入力データや処理途中の異常を利用者に知らせるための引数であり, 正常の場合は 0 にセットされる.

なお, W1 はサブルーチン内でのみ使用する作業領域であるので, 入力時および出力時の内容は特に意味をもたない.

(4) **制限条件**

サブルーチンの引数の制限範囲を明確にしてある.

(5) **エラーインディケータ**

各サブルーチンには, エラーインディケータが出力引数として設けられている. この エラーインディケータは, IERR という変数名に統一されており, 引数表の最後におかれている. 各サブルーチンはサブルーチン内でエラー検出を行い, その結果を IERR に設定する. IERR の値の意味は, 次の 5 段階に分かれている.

表 1–4　エラーインディケータの出力値区分

レベル	IERR の値	意　味	処理内容
正　常	0	正常終了した.	結果は保証される.
警　告	1000〜2999	ある条件のもとで一応の処理が終了した.	条件付きで結果は保証される.
異　常	3000〜3499	引数が制限条件に違反したために処理が打ち切られた.	結果は保証されない.
	3500〜3999	得られた結果がある検定条件を満足しなかった.	得られた結果を返す (結果は保証されない).
	4000 以上	処理の途中で致命的なエラーが発見された. 通常は処理を打ち切る.	結果は保証されない.

(6) **注意事項**

サブルーチンを使用するときの注意点およびあいまいな点を明確にしてある.

(7) **使用例**

サブルーチンの使い方の一例を載せてある. なお複数のサブルーチンを組み合わせて一つの例としてある場合もあるので注意されたい. 出力結果は, 32 ビット整数版での結果であり, コンパイラや組み込み関数の変更などにより丸め誤差の範囲で異なる場合がある.
本説明書に記載されている使用例のプログラムはソースコードの形で「ASL ユーザーズガイド」に収録されている. 入力データも (もし存在する場合は)「ASL ユーザーズガイド」に収録されている. コンパイラを用いて使用例のソースコードから実行形式ファイルを作成する場合には, ライブラリ本体とリンクする必要がある.

1.4　サブルーチン名

ASL の基本機能のサブルーチン名は, 6 桁のアルファニューメリック記号の集まりである.
また, サブルーチン名の各記号にはそれぞれ意味を持ち, 図 1–1 で表される. 利用時においては, 計算用途に合わせてサブルーチン名を指定する必要がある.

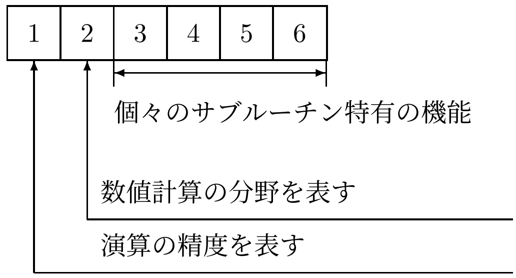


図 1–1　サブルーチン名の構成要素

図 1–1 **の "1" ：** 演算の精度を表す. 基本機能編で使用される文字は, 次の 8 種類である.

D, W	倍精度実数型演算
R，V	単精度実数型演算
Z，J	倍精度複素数型演算
C，I	単精度複素数型演算

ただし, 上記の複素数型とは必ずしも引数の型が複素数型であることを意味しない.

図 1–1 **の "2" ：** 計算の分野を表す. 現在, ASL では次の文字が使用されている.

文字	計算の分野	分冊
A	格納モードの変換	1
	基本行列演算	1, 7
B	連立 1 次方程式 (直接法)	2, 7
C	固有値・固有ベクトル	1, 7
F	フーリエ変換とその応用	3, 7
	時系列分析	6
G	スプライン関数	4
H	数値積分	4
I	特殊関数	5
J	乱数の検定	6
K	常微分方程式初期値問題	4
L	方程式の根	5
M	極値問題・最適化	5
N	近似・回帰分析	4, 6
O	常微分方程式境界値問題, 積分方程式, 偏微分方程式	4
P	補間	4
Q	数値微分	4

文字	計算の分野	分冊
S	ソート・順位付け	5, 7
X	基本行列演算	1
	連立 1 次方程式 (反復法)	7
1	確率分布	6
2	標本統計	6
3	推定と検定	6
4	分散分析・実験計画	6
5	ノンパラメトリック検定	6
6	多変量解析	6

図 1–1 **の "3" ～ "6"：** これらの文字で, 個々のサブルーチンに特有の機能を表す.

1.5 注意事項

(1) 単精度版ではなく, 倍精度版を標準として利用する方がよい. 精度が高いことに加え, 倍精度版の方が単精度版に比べて安定的に解が求まる場合 (特に固有値・固有ベクトル) が多い.

(2) 演算例外の抑止はメインプログラム側で行う必要がある. ASL のサブルーチンでは, コンパイラの演算例外の抑止に関して, ユーザのメインプログラムのコンパイルパラメータの指示に従うように設定してある.

(3) 扱う演算桁数を越える精度を期待することはできない. たとえば倍精度演算の (仮数部の) 演算桁数は 10 進 15 桁程度であるが, ここで数学的に 1 となるような値を計算した場合, 10^{-15} 程度の誤差は必ず発生する. これを抑制する方法として, 任意桁数演算のような多倍長演算のエミュレートが考えられるが, この場合, たとえば円周率のような定数や関数近似の定数なども都度計算する必要が生じるので, 通常の演算と比較して計算効率は悪くなる.

(4) 数学的に解が存在しないような問題の解を得ることはできない. たとえば, 数学的に特異な (または特異に近い) 行列を係数に持つ連立 1 次方程式の解を精度良く求めることは原理的にできない. なお, 数値計算上は, 数学的に特異な行列と特異に近い行列とを厳密に区別することはできない. もちろん, たとえば, 条件数の計算値が設定した基準値以上であれば特異とみなすというようなことはいつでも可能である.

(5) 浮動小数点例外 (オーバフローなど) をおこすようなデータを与えた場合, 正常な計算結果を期待することはできない. ただし, 反復計算で残差の加算等を行った場合に発生する浮動小数点アンダフローなどはこの限りではない.

(6) 数値計算で扱う問題 (特に反復法を計算手法とする問題) では, 与えるデータによっては解が精度良く求められない場合や全く求まらない場合がある. このような場合は, 問題自体を見直して, 解が求まるような問題に変更するなどの処置を講じる必要がある. たとえば, スパース行列を係数とする連立 1 次方程式を解く場合に, 専用のサブルーチンで解が得られないときでも, 密行列用のサブルーチンを用いることで解が得られる場合がある.

(7) 解が複数ある問題を解く場合, 実行するマシンや OS, 用いるコンパイラ等で実行結果が見掛け上異なる場合がある. たとえば, 固有値問題を解いた場合に得られる固有ベクトルがこれに相当する.

(8) “[非推奨]” と表示のあるサブルーチンは, 今後廃止予定の機能である. より高速な実装が **ASL 統合インタフェース**で提供されているので, そちらを利用されたい.

第 2 章　乱数の検定

2.1　概 要

本章は, 与えられた乱数の検定を行うサブルーチンについて説明する.
一様乱数については, 以下の検定を行うことができる.

(1) 頻度 1 次元検定

(2) 頻度 2 次元検定

(3) 頻度 3 次元検定

(4) 連 (昇/降) 検定

(5) 連 (上/下) 検定

(6) 組み合せ検定

(7) ギャップ検定

分布乱数の検定としては, 各分布乱数ごとに頻度 1 次元検定を行うサブルーチンを用意している.

2.1.1 解説

(1) **一様乱数, 頻度 1 次元検定**

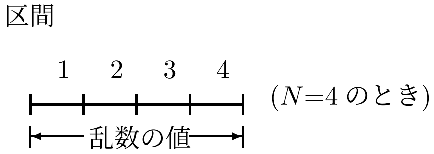
0.0 ～ 1.0 区間の一様乱数の頻度 1 次元検定.

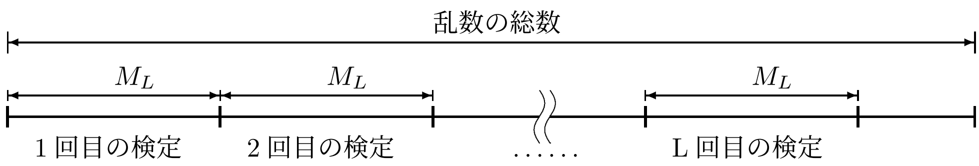
N を分割数, M_L を 1 回の検定に使用する乱数の個数とし, 各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

$$X = \sum_{i=1}^{N} \frac{(f_{Pi} - f_{Ti})^2}{f_{Pi}}$$

f_{Ti} : 0.0 ～ 1.0 区間を N 等分したとき, 区間 i に入る乱数の総数.

ただし各検定ごとに使用する乱数は, 下図で示すとおりである.





$$f_{Pi} : f_{Pi} = \frac{M_L}{N}$$

次に, 以下の条件が成立する場合, 検定合格とする.

$X <$ 入力した有意水準に対するχ^2分布のパーセント点

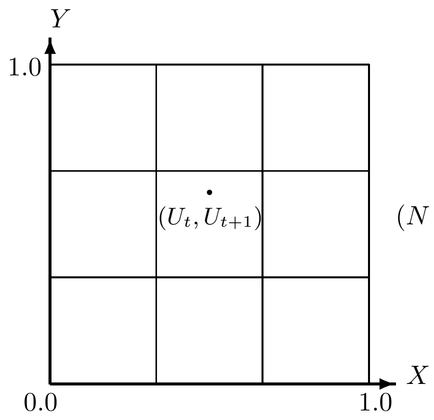
(2) **一様乱数, 頻度 2 次元検定**

0.0 ∼ 1.0 区間の一様乱数の頻度 2 次元検定.

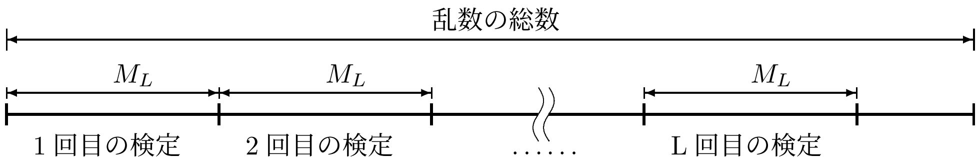
N を分割数, M_L を 1 回の検定に使用する乱数の個数とし, 各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

$$X \quad = \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{(f_{Pij}-f_{Tij})^2}{f_{Pij}}$$

f_{Tij} : X, Y軸の 0.0 ∼ 1.0 区間を N 等分して作成したマス目の中に乱数 U_t, U_{t+1}を 2 次元の点として X, Y座標系に配置したとき, そのマス目内にある点の数.



($N = 3$ の場合)



$$f_{Pij} : f_{Pij} = \frac{M_L}{N^2}$$

次に, 以下の条件が成立する場合, 検定合格とする.

$X <$ 入力した有意水準に対するχ^2分布のパーセント点

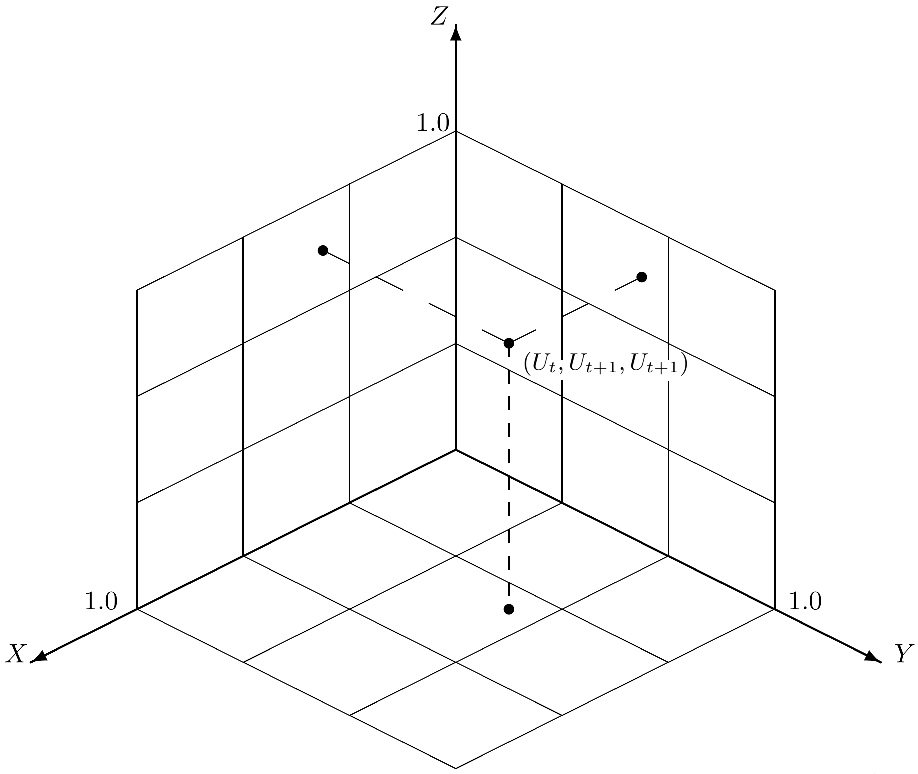
(3) **一様乱数, 頻度 3 次元検定**

0.0 ～ 1.0 区間の一様乱数の頻度 3 次元検定.

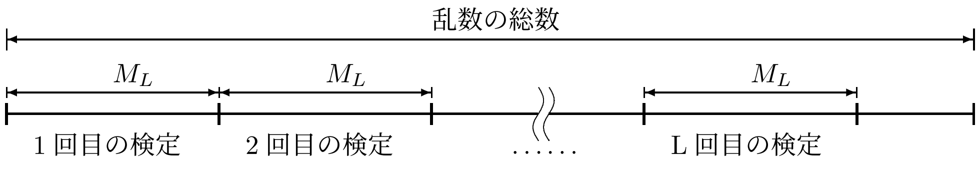
N を分割数, M_L を 1 回の検定に使用する乱数の個数とし, 各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

$$X \quad = \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{(f_{Pijk}-f_{Tijk})^2}{f_{Pijk}}$$

f_{Tijk} : X, Y, Z 軸の 0.0 ～ 1.0 区間をそれぞれ N 等分して作成したマス目の中に, 乱数 U_t, U_{t+1}, U_{t+2} を 3 次元の点として X, Y, Z 座標に配置したとき, そのマス目内にある点の数.



($N = 3$ の場合)



$$f_{Pijk} : f_{Pijk} = \frac{M_L}{N^3}$$

次に, 以下の条件が成立する場合, 検定合格とする.

$X <$ 入力した有意水準に対するχ^2分布のパーセント点

(4) **一様乱数, 連 (昇/降) 検定**

0.0 ～ 1.0 区間の一様乱数の連 (昇/降) 検定を行う.

N を最大の連の長さ, M_L を一回の検定に使用する乱数の個数とし, 各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

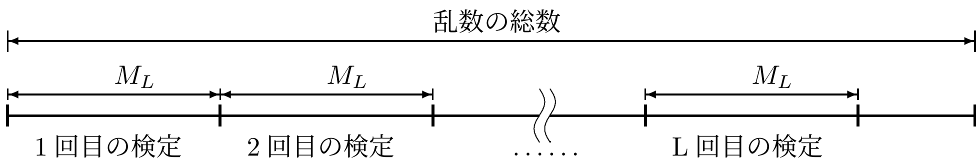
$$X = \sum_{i=1}^{N} \frac{(f_{Pi} - f_{Ti})^2}{f_{Pi}}$$

f_{Ti} : 乱数列中の長さ i の上昇または下降の連の個数

(ただし $i = N$ の場合, 長さが N 以上の上昇の連の個数).

$U_{t-1} > U_t < U_{t+1} < \cdots < U_{t+i} > U_{t+i+1}$ 長さ i の上昇の連の列

ただし, 各検定ごとに使用する乱数は, 下図で示すとおりである.



f_{Pi} : $f_{Pi} = f'_{Pi} \quad (1 \leq i \leq N-1)$

$$f_{P_N} = \sum_{k=N}^{M_L-1} f'_{Pk}$$

$$f'_{Pi} = 2 \times M_L \times \frac{i^2 + 3i + 1}{(i+3)!} - 2\frac{i^3 + 3i^2 - i - 4}{(i+3)!}$$

ただし, 本サブルーチンでは, 検定精度を上げるため

f_{Pi}を下式よって修正した値を使用している.

$$f^*_{Pi} = f_{Pi} \frac{\sum_{i=1}^{N} f_{Ti}}{\sum_{i=1}^{N} f_{Pi}}$$

次に, 以下の条件が成立する場合, 検定合格とする.

$X <$ 入力した有意水準に対するχ^2分布のパーセント点

(5) **一様乱数, 連 (上/下) 検定**

0.0 ～ 1.0 区間の一様乱数の連 (上/下) 検定を行う.

N を最大の連の長さ, M_L を一回の検定に使用する乱数の個数とし, 各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

$$X = \sum_{i=1}^{N} \frac{(f_{Pi} - f_{Ti})^2}{f_{Pi}}$$

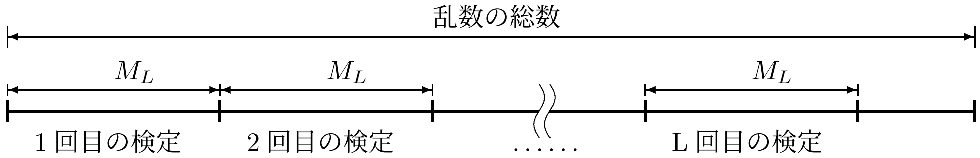
f_{Ti} : 乱数列中の長さ i である 0.5 より上の連の個数

(ただし $i = N$ の場合, 長さが N 以上である 0.5 より上の連の個数)

0.3, 0.6, 0.9, 0.7, 0.8, 0.1

長さ 4 の 0.5 より上の連の列

ただし各検定ごとに使用する乱数は, 下図で示すとおりである.



f_{Pi} : $f_{Pi} = f'_{Pi} \quad (1 \le i \le N-1)$

$$f_{P_N} = \sum_{k=N}^{M_L} f'_{Pk}$$

$$f'_{Pi} = \frac{M_L - i + 3}{2^{i+1}}$$

ただし, 本サブルーチンでは, 検定精度を上げるため

f_{Pi}を次式によって修正した値を使用している.

$$f^*_{Pi} = f_{Pi} \frac{\sum_{i=1}^{N} f_{Ti}}{\sum_{i=1}^{N} f_{Pi}}$$

次に, 以下の条件が成立する場合, 検定合格とする.

$X <$ 入力した有意水準に対するχ^2分布のパーセント点

(6) **一様乱数組み合せ検定**

0.0 ∼ 1.0 区間の一様乱数の組み合せ検定を行う.

本来, 組み合せ検定は, 1 個の乱数のビットパターン中に “0” または “1” のビットが何個あったかで検定を行うが, 本サブルーチンでは, 実数の乱数を扱うためレジスタ長の個数だけ乱数をまとめて, そのうち 0.5 以上の乱数が何個あったかで検定を行う.

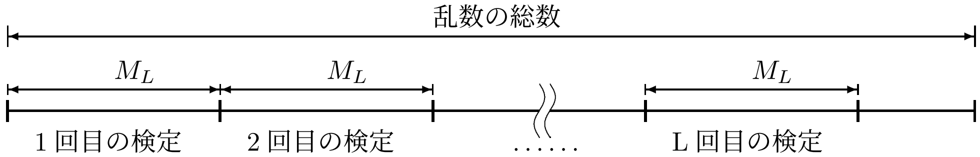
各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

$$X = \sum_{i=0}^{N_B} \frac{(f_{Pi} - f_{Ti})^2}{f_{Pi}}$$

ただし N_Bは, レジスタ長で, 32 である.

f_{Ti} : 乱数を N_B個ずつとりだしそのうち 0.5 以上の乱数が i 個であった組数.

ただし各検定ごとに使用する乱数は, 下図で示すとおりである.



$$f_{Pi} : f_{Pi} = \begin{pmatrix} N_B \\ i \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{N_B} \times \sum_{i=1}^{N_B} f_{Ti} \times [\mathrm{M_L}/\mathrm{N_B}]$$

ただし実際の分割は, 下に示すようになっている.

$$i = 0 \sim 8, 9, 10, \cdots, 22, 23, 24 \sim 32$$

次に, 以下の条件が成立する場合, 検定合格とする.

$X <$ 入力した有意水準に対するχ^2分布のパーセント点

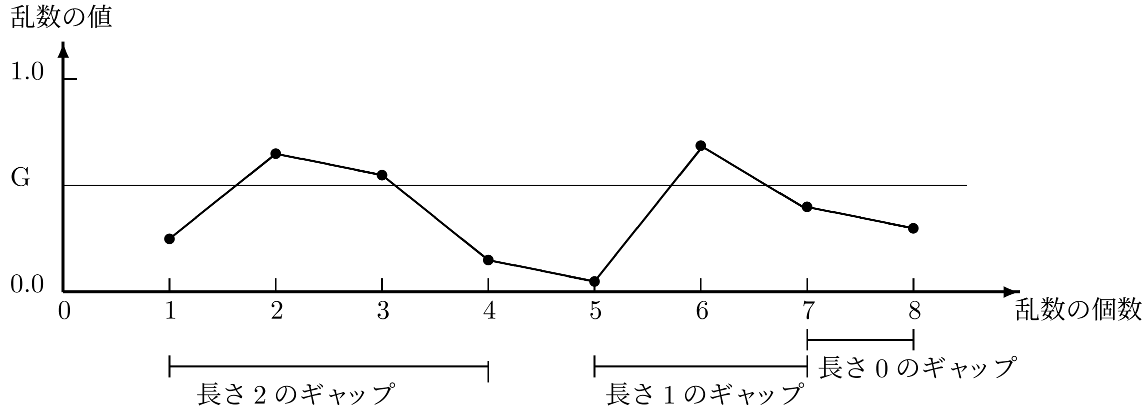
(7) **ギャップ検定**

0.0 ∼ 1.0 区間の一様乱数のギャップ検定を行う.

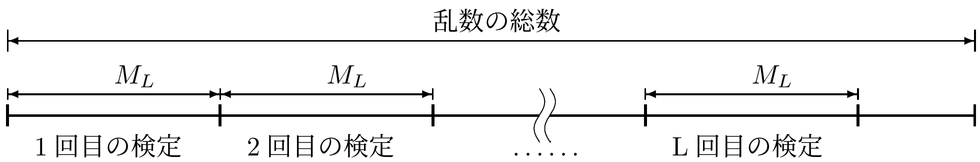
N を最大のギャップ長さ, G をギャップ値, M_L を 1 回の検定に使用する乱数の個数とし, 各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

$$X = \sum_{i=0}^{N} \frac{(f_{Pi} - f_{Ti})^2}{f_{Pi}}$$

f_{Ti} : 0.0 ∼ G の範囲に入る乱数列が生じる長さ i のギャップ個数



ただし各検定ごとに使用する乱数は, 下図で示すとおりである.



f_{Pi} : $f_{Pi} = f'_{Pi} \quad (0 \le i \le N-1)$

$$f_{P_N} = \sum_{k=N}^{M_L-1} f'_{Pk}$$

$$f'_{Pi} = G(1.0 - G)^i \times M_L$$

ただし, 本サブルーチンでは, 検定精度を上げるため f_{Pi}を

次式によって修正した値を使用している.

$$f^*_{Pi} = f_{Pi} \frac{\sum_{i=0}^{N} f_{Ti}}{\sum_{i=0}^{N} f_{Pi}}$$

次に, 以下の条件が成立する場合, 検定合格とする.

$X <$ 入力した有意水準に対するχ^2分布のパーセント点

(8) **分布乱数の検定**

分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(a) 連続分布の場合

N を分割数, M_L を 1 回の検定に使用する乱数の個数, U_P, U_L を検定区間の上限, 下限とし, 各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

$$X = \sum_{i=1}^{N} \frac{(f_{Pi} - f_{Ti})^2}{f_{Pi}}$$

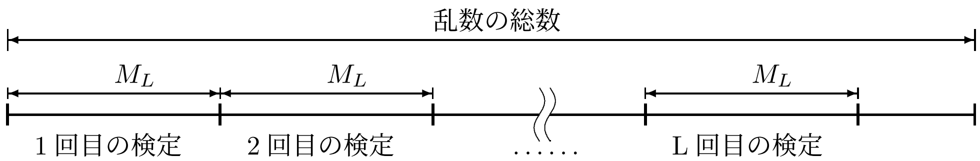
U_P, U_L は分布乱数の種類によって以下のように決まる.

	正規分布, コーシー分布, ガンベル分布, ガンマ分布	指数分布, ワイブル分布
U_P	入力した検定区間の上限	入力した検定区間の上限
U_L	入力した検定区間の下限	0.0

f_{Ti} : $U_L \sim U_P$間を N 等分したとき, 区間 i に入る乱数の個数
(ただし乱数値が U_L以下の場合および U_P以上の場合は,
それぞれ区間 1 および N に入れる).

ただし各検定ごとに使用する乱数は下図で示すとおりである.

f_{Pi}: 区間 i に入る乱数の期待度数.



ただし乱数値が U_L 以下または, U_P 以上になる期待度数がある場合, 区間 1 または N にこの期待度数を加える.

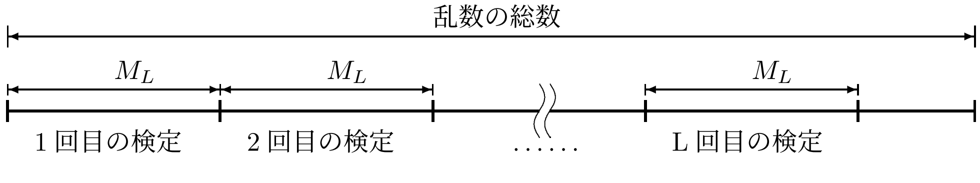
(b) 離散分布の場合

整数 U_P を検定区間の上限, M_L を 1 回の検定に使用する乱数の個数とし, 各検定ごとの χ^2 値 X を以下のように求める.

$$X = \sum_{i=0}^{U_P} \frac{(f_{Pi} - f_{Ti})^2}{f_{Pi}}$$

f_{Ti}:乱数値が i である乱数の個数 (ただし, 乱数値が U_P より大きいときは, U_P の個数に含める).

各検定ごとに使用する乱数は, 下図で示すとおりである.



f_{Pi} : 乱数値が i である期待度数 (ただし, 乱数値が U_Pより大きい期待度数
がある場合, U_Pの期待度数にこの期待度数を加える).

2.1.2 参考文献

(1) Knuth, D. E. , 渋谷政昭訳, “準数値算法/乱数”, サイエンス社 (1981).

(2) Heringa, J. R. , Blote, H. W. J. , Compagner, A. , Int. J. Mod. Phys. C 3, 561 (1992)

(3) Kirpatrick, S. , Stoll, E. P. , “A Very Fast Shift-Register Sequence Random Number Generator”, Journal of Computational Physics, Vol. 40, pp. 517-526 (1981).

(4) 津田義典, 森正寿, 中村彰, “スーパーコンピュータによる最大周期列乱数発生法の高速化手法”, 情報処理学会全国大会講演論文集, Vol. 31, 77-78.

(5) 津田孝夫, “モンテカルロ法とシミュレーション”, 培風館 (1977).

(6) 伏見正則, “乱数”, 東京大学出版会.

2.2 一様乱数の検定

2.2.1 DJTEUN, RJTEUN
一様乱数の検定

(1) **機 能**

与えられた 0.0 ∼ 1.0 区間の一様乱数の検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DJTEUN (U, M, LT, N, G, ALF, K, X2, CX, ISW, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RJTEUN (U, M, LT, N, G, ALF, K, X2, CX, ISW, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	U	{D/R}	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	N	I	1	入 力	ISW=1, 2 または 3:分割数 ISW=4 または 5:最大の連の長さ ISW=6:使用しない ISW=7:最大のギャップ長さ (注意事項 (b) 参照)
5	G	{D/R}	1	入 力	ギャップ値 (注意事項 (c) 参照)
6	ALF	{D/R}	1	入 力	有意水準 (%)
7	K	I	1	出 力	合格した検定数
8	X2	{D/R}	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
9	CX	{D/R}	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
10	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1:頻度 1 次元検定 ISW=2:頻度 2 次元検定 ISW=3:頻度 3 次元検定 ISW=4:連 (昇/降) 検定 ISW=5:連 (上/下) 検定 ISW=6:組み合せ検定 ISW=7:ギャップ検定
11	WK	{D/R}	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ**: ISW=1:N ISW = 2 : N^2 ISW = 3 : N^3 ISW = 4 または 5:2 × N ISW =6:1 ISW = 7 : 2 × (N + 1)
12	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $1 \leq \mathrm{ISW} \leq 7$

(b) $\mathrm{LT} \geq 1$

(c) $0.0 < \mathrm{ALF} < 100.0$

(d) $\mathrm{M} \geq \mathrm{LT}$

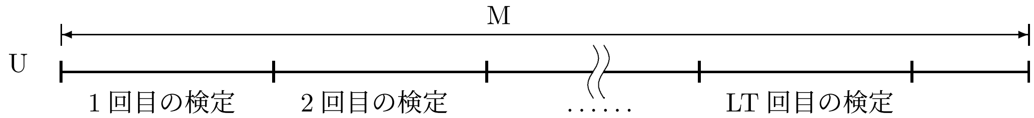
(e) $\mathrm{ISW} = 1 \sim 5$ の場合 $\mathrm{N} \geq 2$
$\mathrm{ISW} = 6$ の場合 $\mathrm{M} \geq 32 \times \mathrm{LT}$
$\mathrm{ISW} = 7$ の場合 $\mathrm{N} \geq 2$ かつ $0.0 < \mathrm{G} < 1.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	N が大きすぎまたは M が小さすぎる. (注意事項 (b) 参照)	処理続行 (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a), (b), (c), (d) または (e) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
4000	$\mathrm{U(i)} < 0.0$ または $\mathrm{U(i)} > 1.0$, $\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{M}$	

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 U との関係



1 回の検定ごとに $\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor$ 個ずつ乱数 U を使用する.
ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(b) ISW=1, 2 または 3 の場合

乱数の総数 M が小さすぎる場合, および分割数 N が大きすぎる場合, 各区間における乱数の期待度数は, 小さくなり, 検定精度が悪くなる.
一般的には, 期待度数 $\mathrm{F_{TN}}$ は下式を満たすのが望ましいとされている.

$$\mathrm{F_{TN}} \geq 5.0$$

本サブルーチンでは, この条件を満足しない場合 IERR=1000 としている.
ただし $\mathrm{F_{TN}}$ は, 検定ごとの下式で示されている.
また, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

頻度 1 次元検定 (ISW=1) の場合

$$\mathrm{F_{TN}} = \lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor \cdot \frac{1.0}{\mathrm{N}}$$

頻度 2 次元検定 (ISW=2) の場合

$$\mathrm{F_{TN}} = \lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor \cdot \frac{1.0}{2.0 \cdot \mathrm{N}^2}$$

頻度 3 次元検定 (ISW=3) の場合

$$\mathrm{F_{TN}} = \lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor \cdot \frac{1.0}{3.0 \cdot \mathrm{N}^3}$$

ISW=4, 5 または 7 の場合

乱数の総数 M が小さすぎる場合, および最大の連の長さ N または最大のギャップ長さ N が大きすぎる場合, 長さが N となる期待度数は小さくなり, 検定精度が悪くなる.

一般的には, 期待度数 $\mathrm{F_{TN}}$ は下式を満たすのが望ましいとされている.

$$F_{TN} \geq 5.0$$

本サブルーチンでは, この条件を満足しない場合, IERR=1000 としている. 次に各検定ごとに目安となる N の計算式とその値を次に示す.

ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

連 (昇/降) 検定 (ISW=4) の場合

$$\mathrm{N} = \lfloor 1 + \ \mathrm{LOG10}\ (\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor) \rfloor$$

例えば

⌊M/LT⌋	100	1, 000	10, 000	100, 000	1, 000, 000
N	3	4	5	6	7

連 (上/下) 検定 (ISW=5) の場合

$$\mathrm{N} = \left\lfloor \frac{\mathrm{LOG10}(\dfrac{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}{10.0})}{\mathrm{LOG10(2)}} \right\rfloor$$

例えば

⌊M/LT⌋	100	1, 000	10, 000	100, 000	1, 000, 000
N	3	6	9	13	16

ギャップ検定 (ISW=7) の場合

$$\mathrm{N} = \left\lfloor \frac{\mathrm{LOG10}\ (\dfrac{5.0}{\mathrm{G} \times \lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor})}{\mathrm{LOG10(1.0-G)}} \right\rfloor$$

例えば G=0.1 の場合

⌊M/LT⌋	100	1, 000	10, 000	100, 000	1, 000, 000
N	6	28	50	72	93

(c) ギャップ値は, ギャップ検定時しか使用しない.
ギャップ値の説明は, 2.1.1 解説 の (7) ギャップ検定の項参照.

(d) WK の大きさは引数表を参照.

(7) **使用例**

(a) 問 題

1000 個の一様乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTEUN
! *** EXAMPLE OF DJTEUN ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER ( M=1000, L=10  , ISW=1 , N=10 )
      DIMENSION  U (M) , X2(L) , WK(N)
!
      WRITE(6,1000)
      IX = 1
      IY = 1
!
      CALL DJUFSP ( M,IX,IY,U,IERR )
!
      ALF = 1.0D0
      WRITE(6,1100) M,L,N,ALF,ISW
!
      CALL DJTEUN ( U,M,L,N,G,ALF,K,X2,CX,ISW,WK,IERR )
!
      WRITE(6,1200) IERR
```

```
      WRITE(6,1300) K
      WRITE(6,1400) (X2(I),I=1,L)
      WRITE(6,1500) CX
!
      STOP
 1000 FORMAT(' ',/,/,' *** DJTEUN ***',/)
 1100 FORMAT('    **  INPUT  **',/,10X,'  M = ',I5,5X,'  L = ',   1&
      I5,/,10X,'  N = ',I5,5X,' ALF= ',F5.1,/,10X,'ISW = ',I5,/)
 1200 FORMAT('    **  OUTPUT  **',/,/,10X,' IERR = ',I5,/)
 1300 FORMAT(10X,' NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 1400 FORMAT(10X,'TEST NO.     1       2       3       4       5   ',&
                 '    6       7       8       9      10   ',/,/,&
             8X,'CHI-SQUARE',/,8X,'VALUE (X2)',10F8.1,/)
 1500 FORMAT(10X,' CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(c) 出力結果

```
*** DJTEUN ***

   **  INPUT  **
          M =  1000        L =    10
          N =    10      ALF=   1.0
        ISW =     1

   **  OUTPUT  **

           IERR =     0

           NUMBER OF PASSED TEST (K) =  10

          TEST NO.     1       2       3       4       5       6       7       8       9      10

        CHI-SQUARE
        VALUE (X2)     7.4    14.8     6.4     9.4     7.2     6.0    10.4     1.8    13.2    10.2

           CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     21.7
```

2.3 連続分布乱数の検定

2.3.1 DJTENO, RJTENO
正規分布乱数の検定

(1) **機 能**

正規分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DJTENO (U, M, LT, N, ALF, UL, UP, AM, SG, K, X2, CX, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RJTENO (U, M, LT, N, ALF, UL, UP, AM, SG, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	U	{D/R}	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	N	I	1	入 力	分割数
5	ALF	{D/R}	1	入 力	有意水準 (%)
6	UL	{D/R}	1	入 力	検定区間の下限 (注意事項 (b) 参照)
7	UP	{D/R}	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
8	AM	{D/R}	1	入 力	平均値
9	SG	{D/R}	1	入 力	標準偏差
10	K	I	1	出 力	合格した検定数
11	X2	{D/R}	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
12	CX	{D/R}	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
13	WK	{D/R}	$2 \times$ N	ワーク	作業領域
14	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{M} \geq \mathrm{LT}$

(b) $\mathrm{LT} \geq 1$

(c) $\mathrm{N} \geq 2$

(d) $\mathrm{UP} > \mathrm{UL}$

(e) $0.0 < \mathrm{ALF} < 100.0$

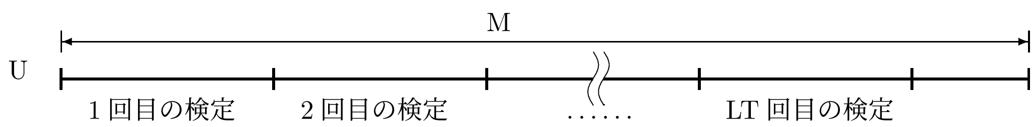
(f) $\mathrm{SG} > 0.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	UL が小さすぎる．または UP が大きすぎる または M が小さすぎる (注意事項 (b) 参照).	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a), (b), (c), (d), (e) または (f) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 U との関係



1 回の検定ごとに $\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor$ 個ずつ乱数 U を使用する.
ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(b) 検定範囲の下限 UL を小さくしすぎるかまたは, 上限 UP が大きすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる.
このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 $\mathrm{F_{Ti}}$ とすると, 以下の条件の場合, IERR=1000 としている.

$$\mathrm{F_{Ti}} < 5 \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{N})$$

次に目安となる UL, UP の計算法を下に示す.

$$\mathrm{UL} = \mathrm{AM} - \mathrm{SG} \times \mathrm{D}$$
$$\mathrm{UP} = \mathrm{AM} + \mathrm{SG} \times \mathrm{D}$$

として

$$\mathrm{D} \times \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{D}^2}{2}} = \frac{5 \times \mathrm{N}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

となる D を求め UL, UP を決める．ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

D の値の例:

$\frac{\mathrm{N}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
D	1.5	2.5	3.5	4.0	4.5

(7) **使用例**

(a) 問 題

平均値 0.0, 標準偏差 1.0 の正規分布乱数を 10000 個発生し, 分割数 10 で 10 回検定する.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTENO
! *** EXAMPLE OF DJTENO ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER ( M=10000, L=10  , N=10   )
      DIMENSION   U(M) , X2(L) , WK(N,2)
!
      WRITE(6,1000)
      IX = 1
      IY = 1
      AM = 0.0D0
      SG = 1.0D0
!
      CALL DJDBNO ( M,AM,SG,IX,IY,U,IERR )
!
      ALF = 1.0D0
      UL = -2.5D0
      UP =  2.5D0
      WRITE(6,1100)  M,L,N,ALF,UL,UP,AM,SG
!
      CALL DJTENO ( U,M,L,N,ALF,UL,UP,AM,SG,K,X2,CX,WK,IERR )
!
      WRITE(6,1200) IERR
      WRITE(6,1300) K
      WRITE(6,1400) (X2(I),I=1,L)
      WRITE(6,1500) CX
!
      STOP
 1000 FORMAT(' ',/,/,' *** DJTENO ***',/)
 1100 FORMAT('    **  INPUT  **',/,10X,'  M = ',I5,5X,'  L = ',I5,/,&
      10X,'  N = ',I5,5X,' ALF= ',F5.1,/,10X,' UL = ',F5.1,5X,&
      ' UP = ',F5.1,/,10X,' AM = ',F5.1,5X,' SG = ',F5.1,/)
 1200 FORMAT('    **  OUTPUT  **',/,/,10X,' IERR = ',I5,/)
 1300 FORMAT(10X,' NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 1400 FORMAT(10X,'TEST NO.     1       2       3       4       5   ',&
                  '    6       7       8       9      10   ',/,/,&
              8X,'CHI-SQUARE',/,8X,'VALUE (X2)',10F8.1,/)
 1500 FORMAT(10X,' CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(c) 出力結果

```
*** DJTENO ***

   **  INPUT  **
            M = 10000       L =    10
            N =    10      ALF=   1.0
           UL =  -2.5      UU =   2.5
           AM =   0.0      SG =   1.0

   **  OUTPUT  **

           IERR =     0

           NUMBER OF PASSED TEST (K) =  10

          TEST NO.     1       2       3       4       5       6       7       8       9      10

        CHI-SQUARE
        VALUE (X2)     7.6     8.1     7.0    13.4     9.0    12.8     7.4    10.1    16.4     8.2

           CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     21.7
```

2.3.2 DJTEEX, RJTEEX
指数分布乱数の検定

(1) **機 能**

指数分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DJTEEX (U, M, LT, N, ALF, UP, AM, K, X2, CX, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RJTEEX (U, M, LT, N, ALF, UP, AM, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	U	{D/R}	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	N	I	1	入 力	分割数
5	ALF	{D/R}	1	入 力	有意水準 (%)
6	UP	{D/R}	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
7	AM	{D/R}	1	入 力	平均値
8	K	I	1	出 力	合格した検定数
9	X2	{D/R}	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
10	CX	{D/R}	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
11	WK	{D/R}	$2 \times$ N	ワーク	作業領域
12	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{M} \geq \mathrm{LT}$

(b) $\mathrm{LT} \geq 1$

(c) $\mathrm{N} \geq 2$

(d) $0.0 < \mathrm{ALF} < 100.0$

(e) $\mathrm{AM} > 0.0$

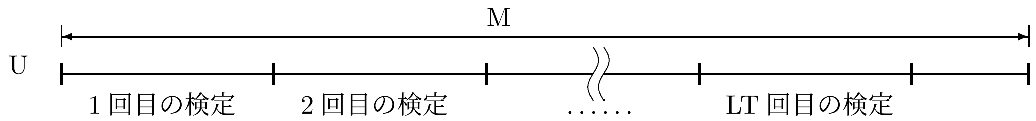
(f) $\mathrm{UP} > 0.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	UP が大きすぎる. または M が小さすぎる (注意事項 (b) 参照)	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a), (b), (c), (d), (e) または (f) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
4000	$\mathrm{U(I)} < 0.0 \quad \mathrm{I} = 1, \cdots, \mathrm{M}$	

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 U との関係



1 回の検定ごとに $\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor$ 個ずつ乱数 U を使用する.
ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(b) 検定範囲の上限 UP を大きくしすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる. このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 F_{Ti} とすると, 以下の条件の場合, IERR=1000 としている.

$$\mathrm{F_{Ti}} < 5 \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{N})$$

なお, 目安となる UP の値は次の式を満足するように決める.

$$\mathrm{UP} \times \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{AM}}} = \frac{5 \times \mathrm{N} \times \mathrm{AM}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}$$

ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.
例えば AM=1.0 の例を以下に示す.

$\frac{\mathrm{N}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}$	0.01	0.001	0.0001	0.00001
UP	4	7	9	12

(7) **使用例**

(a) 問 題

平均値 1.0 の指数分布乱数を 10000 個発生し, 分割数 10 で 10 回検定する.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTEEX
! *** EXAMPLE OF DJTEEX ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER ( M=10000, L=10   , N=10    )
      DIMENSION   U(M) , X2(L) , WK(N,2)
!
      WRITE(6,1000)
      IX = 1
      IY = 1
      AM = 1.0D0
!
      CALL DJDBEX (M,AM,IX,IY,U,IERR)
!
      ALF = 1.0D0
      UP =  4.0D0
      WRITE(6,1100)  M,L,N,ALF,UP,AM
!
      CALL DJTEEX ( U,M,L,N,ALF,UP,AM,K,X2,CX,WK,IERR )
!
      WRITE(6,1200) IERR
      WRITE(6,1300) K
      WRITE(6,1400) (X2(I),I=1,L)
      WRITE(6,1500) CX
      STOP
 1000 FORMAT(' ',/,/,' *** DJTEEX ***',/)
 1100 FORMAT('    **  INPUT  **',/,10X,'  M = ',I5,5X,'  L = ',I5,/,&
      10X,'  N = ',I5,5X,' ALF= ',F5.1,/,10X,' UP = ',F5.3,5X,&
      ' AM = ',F5.1,/)
 1200 FORMAT('    **  OUTPUT  **',/,/,10X,' IERR = ',I5,/)
 1300 FORMAT(10X,' NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 1400 FORMAT(10X,'TEST NO.     1       2       3       4       5   ',&
                  '    6       7       8       9      10   ',/,/,&
              8X,'CHI-SQUARE',/,8X,'VALUE (X2)',10F8.1,/)
 1500 FORMAT(10X,' CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(c) 出力結果

```
*** DJTEEX ***

   **  INPUT  **
        M = 10000       L =    10
        N =    10      ALF=   1.0
       UP = 4.000      AM =   1.0

   **  OUTPUT  **

       IERR =      0

       NUMBER OF PASSED TEST (K) =    9

      TEST NO.     1       2       3       4       5       6       7       8       9      10

     CHI-SQUARE
     VALUE (X2)    16.0     6.3    16.3     6.0     7.4    22.4     8.6     9.5     6.5     7.4

       CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     21.7
```

2.3.3 DJTECC, RJTECC
コーシー分布乱数の検定

(1) **機 能**

コーシー分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DJTECC (U, M, LT, N, ALF, UL, UP, A, B, K, X2, CX, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RJTECC (U, M, LT, N, ALF, UL, UP, A, B, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	U	{D / R}	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	N	I	1	入 力	分割数
5	ALF	{D / R}	1	入 力	有意水準 (%)
6	UL	{D / R}	1	入 力	検定区間の下限 (注意事項 (b) 参照)
7	UP	{D / R}	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
8	A	{D / R}	1	入 力	位置母数 α の値
9	B	{D / R}	1	入 力	尺度母数 β の値
10	K	I	1	出 力	合格した検定数
11	X2	{D / R}	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
12	CX	{D / R}	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
13	WK	{D / R}	$2 \times \mathrm{N} + 4$	ワーク	作業領域
14	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $M \geq LT$

(b) $LT \geq 1$

(c) $N \geq 2$

(d) $UP > UL$

(e) $0.0 < ALF < 100.0$

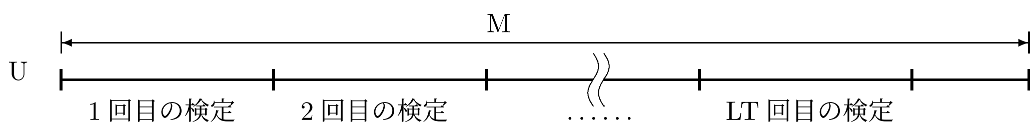
(f) $B > 0.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	UL が小さすぎる. または UP が大きすぎる または M が小さすぎる (注意事項 (b) 参照).	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a), (b), (c), (d), (e) または (f) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 U との関係



1 回の検定ごとに $\lfloor M/L \rfloor$ 個ずつ乱数 U を使用する.
ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(b) 検定範囲の下限 UL を小さくしすぎるかまたは, 上限 UP が大きすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる.
このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 F_{Ti} とすると, 以下の条件の場合, IERR=1000 としている.

$$F_{Ti} < 5 \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

次に目安となる UL, UP の計算法を下に示す.

$$UL = AM - SG \times D$$

$$UP = AM + SG \times D \text{ として}$$

$$D \times e^{-\frac{D^2}{2}} = \frac{5 \times N}{\lfloor M/LT \rfloor} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ となる D を求め UL, UP を決める.}$$

ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.
D の値の例

$\frac{N}{\lfloor M/LT \rfloor}$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
D	1.5	2.5	3.5	4.0	4.5

(7) **使用例**

(a) 問 題

母数 $\alpha = 0.0$, $\beta = 1.0$ のコーシー分布乱数を 10000 個発生し, 分割数 10 で 10 回検定する.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTECC
! *** EXAMPLE OF DJTECC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER ( M=10000, L=10   , N=10    )
      DIMENSION   U(M) , X2(L) , WK(0:N+1,2)
!
      WRITE(6,1000)
      IX = 1
      IY = 1
      A = 0.0D0
      B = 1.0D0
!
      CALL DJDBCC ( M,A,B,IX,IY,U,IERR )
!
      ALF = 1.0D0
      UL = -2.5D0
      UP =  2.0D0
      WRITE(6,1100)  M,L,N,ALF,UL,UP,A,B
!
      CALL DJTECC ( U,M,L,N,ALF,UL,UP,A,B,K,X2,CX,WK,IERR )
!
      WRITE(6,1200) IERR
      WRITE(6,1300) K
      WRITE(6,1400) (X2(I),I=1,L)
      WRITE(6,1500) CX
!
      STOP
 1000 FORMAT(5X,'*** DJTECC ***',/)
 1100 FORMAT(7X,'**  INPUT  **',/,12X,'M = ',I5,7X,'L = ',I5,/,&
      12X,'N = ',I5,6X,'ALF= ',F5.1,/,11X,'UL = ',F5.1,6X,&
      'UP = ',F5.1,/,12X,'A = ',F5.1,7X,'B = ',F5.1,/)
 1200 FORMAT(7X,'**  OUTPUT  **',/,/,10X,' IERR = ',I5,/)
 1300 FORMAT(11X,'NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 1400 FORMAT(10X,'TEST NO.     1       2       3       4       5    ',&
                    '    6       7       8       9      10    ',/,/,&
              8X,'CHI-SQUARE',/,8X,'VALUE (X2)',10F8.1,/)
 1500 FORMAT(11X,'CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(c) 出力結果

```
     *** DJTECC ***

       **  INPUT  **
            M = 10000        L =    10
            N =    10      ALF=   1.0
          UL =  -2.5       UU =   2.0
            A =   0.0        B =   1.0

       **  OUTPUT  **

           IERR =     0

           NUMBER OF PASSED TEST (K) =  10

          TEST NO.     1       2       3       4       5       6       7       8       9      10

        CHI-SQUARE
        VALUE (X2)     9.4    12.6     9.7     7.4     7.5     7.8    15.9     4.9     4.8     3.7

           CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     21.7
```

2.3.4 DJTEGU, RJTEGU
ガンベル分布乱数の検定

(1) **機 能**

正規分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DJTEGU (U, M, LT, N, ALF, UL, UP, A, B, K, X2, CX, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RJTEGU (U, M, LT, N, ALF, UL, UP, A, B, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	U	{D/R}	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	N	I	1	入 力	分割数
5	ALF	{D/R}	1	入 力	有意水準 (%)
6	UL	{D/R}	1	入 力	検定区間の下限 (注意事項 (b) 参照)
7	UP	{D/R}	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
8	A	{D/R}	1	入 力	位置母数
9	B	{D/R}	1	入 力	尺度母数
10	K	I	1	出 力	合格した検定数
11	X2	{D/R}	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
12	CX	{D/R}	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
13	WK	{D/R}	$2 \times \mathrm{N} + 4$	ワーク	作業領域
14	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{M} \geq \mathrm{LT}$

(b) $\mathrm{LT} \geq 1$

(c) $\mathrm{N} \geq 2$

(d) $\mathrm{UP} > \mathrm{UL}$

(e) $0.0 < \mathrm{ALF} < 100.0$

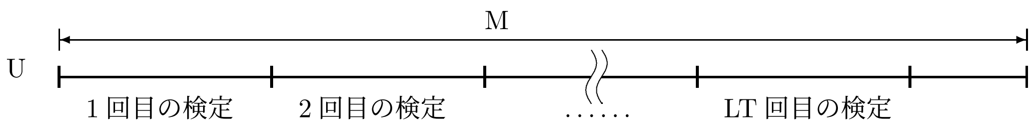
(f) $\mathrm{B} > 0.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	UL が小さすぎる．または UP が大きすぎる または M が小さすぎる (注意事項 (b) 参照).	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	
3050	制限条件 (f) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 U との関係



1 回の検定ごとに $\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor$ 個ずつ乱数 U を使用する.
ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(b) 検定範囲の下限 UL を小さくしすぎるかまたは, 上限 UP が大きすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる.
このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 $\mathrm{F_{Ti}}$ とすると, 以下の条件の場合, IERR=1000 としている.

$$\mathrm{F_{Ti}} < 5 \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{N})$$

次に UL, UP を定める目安となる不等式を下に示す. ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

$$\min\left\{\exp\left(\frac{\mathrm{UP}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)\exp\left[-\exp\left(\frac{\mathrm{UP}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)\right], \exp\left(\frac{\mathrm{UL}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)\exp\left[-\exp\left(\frac{\mathrm{UL}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)\right]\right\}$$
$$\geq 5 \times \frac{\mathrm{B} \times \mathrm{N}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor \times (\mathrm{UP}-\mathrm{UL})}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

位置母数 0.0, 尺度母数 1.0 のガンベル分布乱数を 10000 個発生し, 分割数 10 で 10 回検定する.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTEGU
! *** EXEMPLE OF DJTEGU ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER ( NMAX=100000 )
      PARAMETER ( DONE = 1.0D0, DMONE = -1.0D0, DZERO = 0.0D0)
      PARAMETER ( DFIVE = 5.0D0, DM100 = -100.0D0, D100 = 100.0D0 )
      PARAMETER ( DM27 = -2.7D0, D27 = 2.7D0 )
      DIMENSION RR(NMAX),X2(NMAX),WK(2*NMAX+4)
!
      N  = 10000
      XA = DONE
      XB = DONE
      IX = 1
      IY = 1
!
      L    = 10
      NDIV = 10
      ALF  = DFIVE
      UL   = DM27
      UP   = D27
!
      CALL DJDBGU(N,XA,XB,IX,IY,RR,KERR)
      IF( KERR .GT. 0 ) THEN
         WRITE(6,6000) KERR
      ELSE
         WRITE(6,6010) N,L,NDIV,ALF,UL,UP,XA,XB
      ENDIF
!
      CALL DJTEGU(RR,N,L,NDIV,ALF,UL,UP,XA,XB,K,X2,CX,WK,IERR)
      WRITE(6,6020) IERR
      IF( IERR .EQ. 0 ) THEN
         WRITE(6,6030) K
         WRITE(6,6040) (X2(I),I=1,L)
         WRITE(6,6050) CX
      ENDIF
      STOP
!
 6000 FORMAT(1X,'KERR = ',I4)
 6010 FORMAT(/,&
      1X,'     ** INPUT **',/,/,&
      1X,'       N    = ',I10,'       L    = ',I10,/,&
      1X,'       NDIV = ',I10,'       ALF  = ',F10.3,/,&
      1X,'       UL   = ',F10.3,'       UP   = ',F10.3,/,&
      1X,'       XA   = ',F10.3,'       XB   = ',F10.3)
 6020 FORMAT(/,&
      1X,'     ** OUTPUT **',/,/,&
      1X,'       IERR = ',I4)
 6030 FORMAT(/,&
      1X,'       NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 6040 FORMAT(&
      1X,'       TEST NO.      1     2     3     4     5',&
         '     6     7     8     9    10',/,/,&
      1X,'       CHI-SQUARE',/,&
      1X,'       VALUE (X2)',10F6.1,/)
 6050 FORMAT(/,&
      1X,'       CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(c) 出力結果

```
     ** INPUT **

       N    =      10000       L    =         10
       NDIV =         10       ALF  =      5.000
       UL   =     -2.700       UP   =      2.700
       XA   =      1.000       XB   =      1.000

     ** OUTPUT **

       IERR =    0

       NUMBER OF PASSED TEST (K) =  10

       TEST NO.      1     2     3     4     5     6     7     8     9    10

       CHI-SQUARE
       VALUE (X2)   7.1   8.2  10.4   8.0   9.7  14.7  12.1   4.0   4.7  10.9


       CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     16.9
```

2.3.5 DJTEWE, RJTEWE
ワイブル分布乱数の検定

(1) **機 能**

ワイブル分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DJTEWE (U, M, LT, N, ALF, UP, A, B, K, X2, CX, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RJTEWE (U, M, LT, N, ALF, UP, A, B, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	U	{D, R}	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	N	I	1	入 力	分割数
5	ALF	{D, R}	1	入 力	有意水準 (%)
6	UP	{D, R}	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
7	A	{D, R}	1	入 力	形状母数 a
8	B	{D, R}	1	入 力	尺度母数 b
9	K	I	1	出 力	合格した検定数
10	X2	{D, R}	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
11	CX	{D, R}	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
12	WK	{D, R}	$2 \times$ N	ワーク	作業領域
13	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{M} \geq \mathrm{LT}$

(b) $\mathrm{LT} \geq 1$

(c) $\mathrm{N} \geq 2$

(d) $0.0 < \mathrm{ALF} < 100.0$

(e) $\mathrm{UP} > 0.0$

(f) $\mathrm{A} > 0.0$

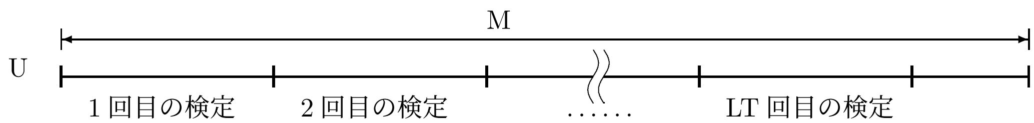
(g) $\mathrm{B} > 0.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	UP が大きすぎる. (注意事項 (b) 参照)	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	
3050	制限条件 (f) を満足しなかった.	
3060	制限条件 (g) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 U との関係



1 回の検定ごとに $\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor$ 個ずつ乱数 U を使用する.
ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(b) 検定範囲の上限 UP を大きくしすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる. このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 $\mathrm{F_{Ti}}$ とすると, 以下の条件の場合, IERR=1000 としている.

$$\mathrm{F_{Ti}} < 5 \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{N})$$

なお, 目安となる UP の値は次の式を満足するように決める.

$$\mathrm{UP} \times e^{-(\frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{B}})^{\mathrm{A}}} = \frac{5 \times \mathrm{N}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}$$

ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

例えば A=2.0, B=1.0 の例を以下に示す.

$\frac{\mathrm{N}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}$	0.01	0.001	0.0001	0.00001
UP	1.9	2.5	2.9	3.3

(7) **使用例**

(a) 問 題

形状母数 2.0, 尺度母数 1.0 のワイブル分布乱数を 10000 個発生し, 分割数 10 で 10 回検定する.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTEWE
! *** EXEMPLE OF DJTEWE ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER ( NMAX=100000 )
      PARAMETER ( D0 = 0.0D0, D5 = 5.0D0, D100 = 100.0D0 )
      PARAMETER ( D1 = 1.0D0, D2 = 2.0D0, D3 = 3.0D0 )
      DIMENSION RR(NMAX),X2(NMAX),WK(2*NMAX+4)
!
      N  = 10000
      XA = D2
      XB = D1
      IX = 1
      IY = 1
!
      L    = 10
      NDIV = 10
      ALF  = D5
      UP   = 1.9
!
      CALL DJDBWE (N,XA,XB,IX,IY,RR,KERR)
      IF( KERR .GT. 0 ) THEN
         WRITE(6,6000) KERR
      ELSE
         WRITE(6,6010) N,L,NDIV,ALF,UP,XA,XB
      ENDIF
!
      CALL DJTEWE(RR,N,L,NDIV,ALF,UP,XA,XB,K,X2,CX,WK,IERR)
      WRITE(6,6020) IERR
      IF( IERR .EQ. 0 ) THEN
         WRITE(6,6030) K
         WRITE(6,6040) (X2(I),I=1,L)
         WRITE(6,6050) CX
      ENDIF
      STOP
!
 6000 FORMAT(1X,'KERR = ',I4)
 6010 FORMAT(1X,/,&
      1X,'  ** INPUT **',/,/,&
      1X,'    N    = ',I10,'       L    = ',I10,/,&
      1X,'    NDIV = ',I10,'       ALF  = ',F10.3,/,&
      1X,'    UP   = ',F10.3,/,&
      1X,'    XA   = ',F10.3,'       XB   = ',F10.3)
 6020 FORMAT(1X,/,&
      1X,'  ** OUTPUT **',/,/,&
      1X,'    IERR = ',I4)
 6030 FORMAT(1X,/,&
      1X,'    NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 6040 FORMAT(&
      1X,'    TEST NO.      1     2     3     4     5',&
         '     6     7     8     9    10',/,/,&
      1X,'    CHI-SQUARE',/,&
      1X,'    VALUE (X2)',10F6.1,/)
 6050 FORMAT(1X,/,1X,&
      '    CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(c) 出力結果

```
  ** INPUT **

    N    =      10000       L    =         10
    NDIV =         10       ALF  =      5.000
    UP   =      1.900
    XA   =      2.000       XB   =      1.000

  ** OUTPUT **

    IERR =    0

    NUMBER OF PASSED TEST (K) =   9

    TEST NO.      1     2     3     4     5     6     7     8     9    10

    CHI-SQUARE
    VALUE (X2)  10.3  13.5  12.5   9.4  12.3  17.6  10.1   5.1   7.2  11.7


    CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     16.9
```

2.3.6 DJTEGM, RJTEGM ガンマ分布乱数の検定

(1) **機 能**

ガンマ分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DJTEGM (U, M, LT, NDIV, ALF, UL, UP, GAMALP, K, X2, CX, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RJTEGM (U, M, LT, NDIV, ALF, UL, UP, GAMALP, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	U	{D / R}	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	NDIV	I	1	入 力	分割数
5	ALF	{D / R}	1	入 力	有意水準 (%)
6	UL	{D / R}	1	入 力	検定区間の下限 (注意事項 (b) 参照)
7	UP	{D / R}	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
8	GAMALP	{D / R}	1	入 力	ガンマ分布の形状母数
9	K	I	1	出 力	合格した検定数
10	X2	{D / R}	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
11	CX	{D / R}	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
12	WK	{D / R}	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** $(2 \times \mathrm{NDIV} + 4)$
13	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) M $\geq$ LT

(b) LT $\geq$ 1

(c) NDIV $\geq$ 2

(d) UP $>$ UL

(e) $0.0 <$ ALF < 100.0

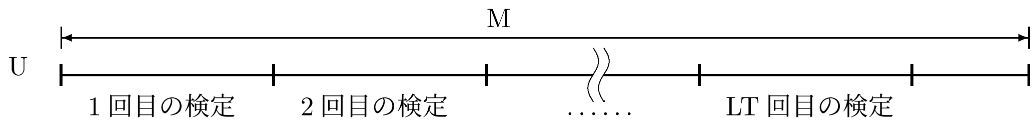
(f) GAMALP > 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	UL が小さすぎる. または UP が大きすぎる または M が小さすぎる (注意事項 (b) 参照).	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	
3050	制限条件 (f) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 U との関係



1 回の検定ごとに $\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor$ 個ずつ乱数 U を使用する.
ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(b) 検定範囲の下限 UL を小さくしすぎるかまたは, 上限 UP が大きすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる.
このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 $\mathrm{F_{Ti}}$ とすると, 以下の条件の場合, IERR=1000 としている.

$$\mathrm{F_{Ti}} < 5 \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{NDIV}).$$

(7) **使用例**

(a) 問 題
$\alpha = 3.0$ のガンマ分布乱数を 10000 個発生し, 分割数 10 で 10 回検定する.

(b) 入力データ
M = 10000, L = 10, NDIV = 10, ALF = 5.0, UL = 0.0, UP = 9.0, GAMALP = 3.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTEGM
! *** EXEMPLE OF DJTEGM ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER ( N=10000 )
      PARAMETER ( DZERO = 0.0D0, D3 = 3.0D0, D5 = 5.0D0, D9 = 9.0D0 )
      DIMENSION RR(N),X2(N),WK(2*N+4)
!
      IX = 1
      IY = 1
!
      L    = 10
      NDIV = 10
      ALF  = D5
!
      UL   = DZERO
!
      GAMALP = D3
      UP   = D9
!
      WRITE(6,5000) N,GAMALP
      CALL DJDBGM(N,GAMALP,IX,IY,RR,KERR)
      WRITE(6,6020) KERR
!
      WRITE(6,6010) N,L,NDIV,ALF,UL,UP,GAMALP
      CALL DJTEGM(RR,N,L,NDIV,ALF,UL,UP,GAMALP,K,X2,CX,WK,IERR)
      WRITE(6,6020) IERR
      IF( IERR .EQ. 0 ) THEN
         WRITE(6,6030) K
         WRITE(6,6040) (X2(I),I=1,L)
         WRITE(6,6050) CX
      ENDIF
      STOP
!
 5000 FORMAT(/,&
      1X,'  ** GERERATION **',/,/,&
      1X,'      ** INPUT **',/,/,&
      1X,'        N    = ',I10,'    GAMALP  = ',F10.3)
 6010 FORMAT(/,&
      1X,'  ** TEST **',/,/,&
      1X,'      ** INPUT **',/,/,&
      1X,'        N    = ',I10,'       L    = ',I10,/,&
      1X,'        NDIV = ',I10,'       ALF  = ',F10.3,/,&
      1X,'        UL   = ',F10.3,'       UP   = ',F10.3,/,&
      1X,'     GAMALP  = ',F10.3)
 6020 FORMAT(/,&
      1X,'      ** OUTPUT **',/,/,&
      1X,'        IERR = ',I4)
 6030 FORMAT(/,&
      1X,'        NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 6040 FORMAT(&
      1X,'        TEST NO.      1     2     3     4     5',&
         '     6     7     8     9    10',/,/,&
      1X,'        CHI-SQUARE',/,&
      1X,'        VALUE (X2)',10F6.1,/)
 6050 FORMAT(/,&
      1X,'        CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(d) 出力結果

```
  ** GERERATION **

      ** INPUT **

        N    =      10000    GAMALP  =      3.000

      ** OUTPUT **

        IERR =    0

  ** TEST **

      ** INPUT **

        N    =      10000       L    =         10
        NDIV =         10       ALF  =      5.000
        UL   =      0.000       UP   =      9.000
     GAMALP  =      3.000

      ** OUTPUT **

        IERR =    0

        NUMBER OF PASSED TEST (K) =   9

        TEST NO.      1     2     3     4     5     6     7     8     9    10

        CHI-SQUARE
        VALUE (X2)   3.2   7.9   9.2   9.7   1.9   6.6  20.3   8.6   8.7   6.4


        CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     16.9
```

2.3.7 DJTELG, RJTELG
ロジスティック分布乱数の検定

(1) **機 能**

ロジスティック分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DJTELG (U, M, LT, NDIV, ALF, UL, UP, XA, XB, K, X2, CX, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RJTELG (U, M, LT, NDIV, ALF, UL, UP, XA, XB, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	U	{D/R}	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	NDIV	I	1	入 力	分割数
5	ALF	{D/R}	1	入 力	有意水準 (%)
6	UL	{D/R}	1	入 力	検定区間の下限 (注意事項 (b) 参照)
7	UP	{D/R}	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
8	XA	{D/R}	1	入 力	平均値
9	XB	{D/R}	1	入 力	パラメータ β の値 (注意事項 (c) 参照)
10	K	I	1	出 力	合格した検定数
11	X2	{D/R}	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
12	CX	{D/R}	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
13	WK	{D/R}	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** $(2 \times \mathrm{NDIV} + 4)$
14	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) M ≥ LT

(b) LT ≥ 1

(c) NDIV ≥ 2

(d) UP > UL

(e) 0.0 < ALF < 100.0

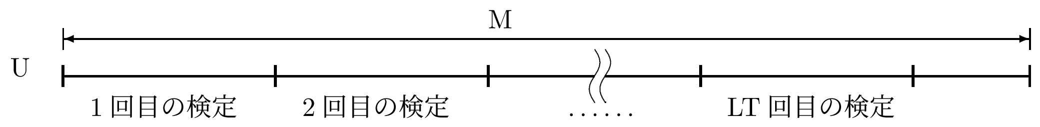
(f) XB > 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	UL が小さすぎる, または UP が大きすぎる, または M が小さすぎる. (注意事項 (b) 参照)	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	
3050	制限条件 (f) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 U との関係



1 回の検定ごとに $\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor$ 個ずつ乱数 U を使用する.
ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(b) 検定範囲の下限 UL を小さくしすぎるかまたは, 上限 UP が大きすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる.
このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 $\mathrm{F_{Ti}}$ とすると, 以下の条件の場合, IERR=1000 としている.

$$\mathrm{F_{Ti}} < 5 \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{NDIV}).$$

また, UP, UL を定める目安となる不等式を以下に示す.

$$(\mathrm{UP}-\mathrm{UL}) \times \min\left\{ \frac{\exp\left(-\dfrac{\mathrm{UL}-\mathrm{XA}}{\mathrm{XB}}\right)}{\left\{1+\exp\left(-\dfrac{\mathrm{UL}-\mathrm{XA}}{\mathrm{XB}}\right)\right\}^2}, \frac{\exp\left(-\dfrac{\mathrm{UP}-\mathrm{XA}}{\mathrm{XB}}\right)}{\left\{1+\exp\left(-\dfrac{\mathrm{UP}-\mathrm{XA}}{\mathrm{XB}}\right)\right\}^2} \right\}$$
$$\geq \frac{5 \times \mathrm{NDIV} \times \mathrm{XB}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}$$

ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(c) この分布の分散 $\sigma^2 = \dfrac{\pi^2\beta^2}{3}$ である.

(7) **使用例**

(a) 問 題

平均値 1.0, $\beta = 1.0$ のロジスティック分布乱数を 10000 個発生し, 分割数 10 で 10 回検定する.

(b) 入力データ

M = 10000, L = 10, NDIV = 10, ALF = 5.0, UL = −4.7, UP = 4.7, XA = 1.0, XB = 1.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTELG
! *** EXEMPLE OF DJTELG ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER ( NMAX=100000 )
      PARAMETER ( DONE = 1.0D0, DMONE = -1.0D0, DZERO = 0.0D0)
      PARAMETER ( DFIVE = 5.0D0, DM100 = -100.0D0, D100 = 100.0D0 )
      PARAMETER ( DM47 = -4.7D0, D47 = 4.7D0 )
      DIMENSION RR(NMAX),X2(NMAX),WK(2*NMAX+4)
!
      N  = 10000
      XA = DONE
      XB = DONE
      IX = 1
      IY = 1
!
      L    = 10
      NDIV = 10
      ALF  = DFIVE
      UL   = DM47
      UP   = D47
!
      CALL DJDBLG(N,XA,XB,IX,IY,RR,KERR)
      IF( KERR .GT. 0 ) THEN
         WRITE(6,6000) KERR
      ELSE
         WRITE(6,6010) N,L,NDIV,ALF,UL,UP,XA,XB
      ENDIF
!
      CALL DJTELG(RR,N,L,NDIV,ALF,UL,UP,XA,XB,K,X2,CX,WK,IERR)
      WRITE(6,6020) IERR
      IF( IERR .EQ. 0 ) THEN
         WRITE(6,6030) K
         WRITE(6,6040) (X2(I),I=1,L)
         WRITE(6,6050) CX
      ENDIF
      STOP
!
 6000 FORMAT(1X,'KERR = ',I4)
 6010 FORMAT(/,&
      1X,'     ** INPUT **',/,/,&
      1X,'       N    = ',I10,'       L    = ',I10,/,&
      1X,'       NDIV = ',I10,'       ALF  = ',F10.3,/,&
      1X,'       UL   = ',F10.3,'       UP   = ',F10.3,/,&
      1X,'       XA   = ',F10.3,'       XB   = ',F10.3)
 6020 FORMAT(/,&
      1X,'     ** OUTPUT **',/,/,&
      1X,'       IERR = ',I4)
 6030 FORMAT(/,&
      1X,'       NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 6040 FORMAT(&
      1X,'       TEST NO.     1     2     3     4     5',&
         '     6     7     8     9    10',/,/,&
      1X,'       CHI-SQUARE',/,&
      1X,'       VALUE (X2)',10F6.1,/)
 6050 FORMAT(/,&
      1X,'       CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(d) 出力結果

```
     ** INPUT **

       N    =      10000       L    =         10
       NDIV =         10       ALF  =      5.000
       UL   =     -4.700       UP   =      4.700
       XA   =      1.000       XB   =      1.000

     ** OUTPUT **

       IERR =    0

       NUMBER OF PASSED TEST (K) =  10

       TEST NO.     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10

       CHI-SQUARE
       VALUE (X2)   4.8   7.6   7.3   6.7   4.1  10.7   9.8   6.3   6.1   8.1


       CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     16.9
```

2.4 離散分布乱数の検定

2.4.1 RJTEBI 二項分布乱数の検定

(1) **機 能**

二項分布乱数の頻度 1 次検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

なし

単精度サブルーチン:

CALL RJTEBI (NL, M, LT, IUP, ALF, MN, P, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

R:単精度実数型　C:単精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	NL	I	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	IUP	I	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
5	ALF	R	1	入 力	有意水準 (%)
6	MN	I	1	入 力	試行回数
7	P	R	1	入 力	成功確率
8	K	I	1	出 力	合格した検定数
9	X2	R	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
10	CX	R	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
11	WK	R	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** $(2 \times (\mathrm{IUP}+1))$
12	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{M} \geq \mathrm{LT}$

(b) $\mathrm{LT} \geq 1$

(c) $0.0 < \mathrm{ALF} < 100.0$

(d) $\mathrm{MN} \geq 1$

(e) $0.0 < \mathrm{P} < 1.0$

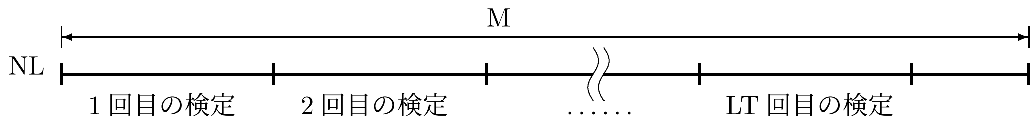
(f) $0 < \mathrm{IUP} \leq \mathrm{MN}$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	IUP が大きすぎるまたは M が小さすぎる. (注意事項 (b) 参照)	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a), (b), (c), (d), (e) または (f) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
4000	$NL(i) < 0$ または $NL(i) > MN$ $(i = 1, \cdots, M)$	

(6) 注意事項

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 NL との関係



(b) 検定範囲の上限 IUP を大きくしすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる.

このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 F_{Ti} とすると, 以下の条件の場合,
IERR=1000 としている.

$$F_{Ti} < 5 \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

次に目安となる IUP の値は次の式を満足するように決める.

$$\binom{MN}{IUP} P^{IUP}(1-P)^{MN-IUP} = \frac{5}{\lfloor M/LT \rfloor}$$

ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.
例えば P=0.5 とすると次の表のようになる.

表 2−1　IPU の値の例

		$\lfloor M/LT \rfloor$			
		100	1, 000	10, 000	100, 000
MN	10	7	9	10	10
	50	29	33	36	38
	100	54	61	65	69

(7) 使用例

(a) 問 題

試行回数 4, 成功確率 0.5 の二項分布乱数を 10000 個発生し, 10 回検定する.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTEBI
! *** EXAMPLE OF RJTEBI ***
      PARAMETER ( M=10000, L=10   , MN=4       , IUP=4       )
      DIMENSION  NL(M) , X2(L) , IWK1(MN+2), WK1(MN+2) , WK(IUP+1,2)
!
      WRITE(6,1000)
      IX = 1
      IY = 1
      P  = 0.5
      IWK1(1) = 0
      WK1 (1) = 0.0
!
      CALL RJDBBI ( M,MN,P,IX,IY,NL,IWK1,WK1,IERR )
!
      ALF = 1.00
      WRITE(6,1100) M,L,IUP,ALF,MN,P
!
      CALL RJTEBI ( NL,M,L,IUP,ALF,MN,P,K,X2,CX,WK,IERR )
!
      WRITE(6,1200) IERR
      WRITE(6,1300) K
      WRITE(6,1400) (X2(I),I=1,L)
      WRITE(6,1500) CX
      STOP
 1000 FORMAT(' ',/,/,' *** RJTEBI ***',/)
 1100 FORMAT('    **  INPUT  **',/,10X,'  M = ',I5,5X,'  L = ',I5,/,&
      10X,' IUP= ',I5,5X,' ALF= ',F5.1,/,10X,' MN = ',I5,5X,&
      ' P  = ',F5.3,/)
 1200 FORMAT('    **  OUTPUT  **',/,/,10X,' IERR = ',I5,/)
 1300 FORMAT(10X,' NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 1400 FORMAT(10X,'TEST NO.      1       2       3       4       5   ',&
                    '    6       7       8       9      10   ',/,/,&
             8X,'CHI-SQUARE',/,8X,'VALUE (X2)',10F8.1,/)
 1500 FORMAT(10X,' CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(c) 出力結果

```
*** RJTEBI ***

   **  INPUT  **
          M = 10000        L =    10
         IUP=     4      ALF=   1.0
         MN =     4      P  = 0.500

   **  OUTPUT  **

         IERR =     0

         NUMBER OF PASSED TEST (K) =  10

        TEST NO.      1       2       3       4       5       6       7       8       9      10

       CHI-SQUARE
       VALUE (X2)     4.6     9.6     2.5     1.9     0.9     1.2     3.8     2.4     2.2     2.5

         CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     13.3
```

2.4.2 RJTENG 幾何分布乱数の検定

(1) **機 能**

幾何分布乱数の頻度 1 次検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

なし

単精度サブルーチン:

CALL RJTENG (NL, M, LT, IUP, ALF, P, K, X2, CX, IWK, IERR)

(3) **引 数**

R:単精度実数型　C:単精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	NL	I	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	IUP	I	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
5	ALF	R	1	入 力	有意水準 (%)
6	P	R	1	入 力	成功確率
7	K	I	1	出 力	合格した検定数
8	X2	R	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
9	CX	R	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
10	IWK	I	$2 \times$ (IUP)	ワーク	作業領域
11	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{M} \geq \mathrm{LT}$

(b) $\mathrm{LT} \geq 1$

(c) $0.0 < \mathrm{ALF} < 100.0$

(d) $0.0 < \mathrm{P} < 1.0$

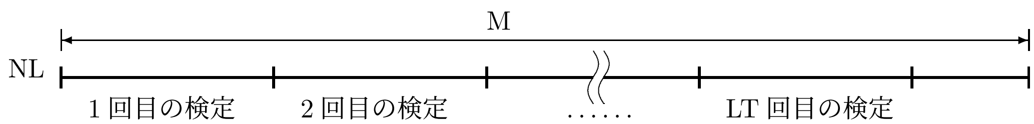
(e) $0 < \mathrm{IUP}$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	IUP が大きすぎるまたは M が小さすぎる. (注意事項 (b) 参照)	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) 注意事項

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 NL との関係



(b) 検定範囲の上限 IUP を大きくしすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる.
このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 F_{Ti} とすると, 以下の条件の場合, IERR=1000 としている.

$$\mathrm{F_{Ti}} < 5 \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{N})$$

次に目安となる IUP の値は次の式を満足するように決める.

$$(1-\mathrm{P})^{\mathrm{IUP}-1}\mathrm{P} = \frac{5}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}$$

ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.
例えば P=0.5 とすると次の表のようになる.

⌊M/LT⌋	100	1000	10000	100000	1000000
IUP	4	7	10	14	17

(7) 使用例

(a) 問 題

成功確率 0.6 の幾何分布乱数を 10000 個発生し, 10 回検定する.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTENG
! *** EXAMPLE OF RJTENG ***
      PARAMETER ( M=10000, L=10, IUP=6 )
      DIMENSION  NL(M), X2(L), IWK(IUP*2)
!
      IX = 1
      IY = 1
      P  = 0.6E0
!
      CALL RJDBNG ( M, P, IX, IY, NL, IERR )
!
      ALF = 1.0E0
!
      CALL RJTENG ( NL, M, L, IUP, ALF, P, K, X2, CX, IWK, IERR )
!
```

```
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1100) M,L,IUP,ALF,P
      WRITE(6,1200) IERR
      WRITE(6,1300) K
      WRITE(6,1400) (X2(I),I=1,L)
      WRITE(6,1500) CX
      STOP
 1000 FORMAT(1X,/,/,&
             1X,'*** RJTEBI ***',/)
 1100 FORMAT(4X,'**  INPUT  **',/,1X,&
             10X,'M  = ',I5,'       ',' L  = ',I5,/,&
             11X,'IUP= ',I5,'       ',' ALF= ',F5.1,/,&
             11X,'P  = ',F5.1 ,/)
 1200 FORMAT(4X,'**  OUTPUT  **',/,/,&
             11X,'IERR = ',I5,/)
 1300 FORMAT(11X,'NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 1400 FORMAT(11X,&
             'TEST NO.     1       2       3       4       5',&
             '        6       7       8       9      10    ',/,/,&
             9X ,'CHI-SQUARE',/,&
             9X ,'VALUE (X2)',10F8.1,/)
 1500 FORMAT(9X ,'CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT ',&
                 '(CX) = ',F8.1                                )
      END
```

(c) 出力結果

```
*** RJTEBI ***

   **  INPUT  **
          M  = 10000      L  =    10
          IUP=     6      ALF=   1.0
          P  =   0.6

   **  OUTPUT  **

          IERR =     0

          NUMBER OF PASSED TEST (K) =  10

          TEST NO.     1       2       3       4       5       6       7       8       9      10

        CHI-SQUARE
        VALUE (X2)     8.4     6.9     7.8     5.6     2.6     6.1     4.7     2.2     4.4     5.3

        CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     15.1
```

2.4.3 RJTEPO ポアソン分布乱数の検定

(1) **機 能**

ポアソン分布乱数の頻度 1 次元検定を行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

なし

単精度サブルーチン:

CALL RJTEPO (NL, M, LT, IUP, ALF, AM, K, X2, CX, WK, IERR)

(3) **引 数**

R:単精度実数型　C:単精度複素数型　I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	NL	I	M	入 力	乱数値
2	M	I	1	入 力	乱数の総数
3	LT	I	1	入 力	検定の繰り返し数 (注意事項 (a) 参照)
4	IUP	I	1	入 力	検定区間の上限 (注意事項 (b) 参照)
5	ALF	R	1	入 力	有意水準 (%)
6	AM	R	1	入 力	平均値
7	K	I	1	出 力	合格した検定数
8	X2	R	LT	出 力	検定結果の χ^2 値
9	CX	R	1	出 力	有意水準に対する χ^2 値
10	WK	R	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** $(2 \times (\mathrm{IUP}+1))$
11	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{M} \geq \mathrm{LT}$

(b) $\mathrm{LT} \geq 1$

(c) $0.0 < \mathrm{ALF} < 100.0$

(d) $0.0 < \mathrm{AM} <$ LOG (計算機の表しうる最大値)

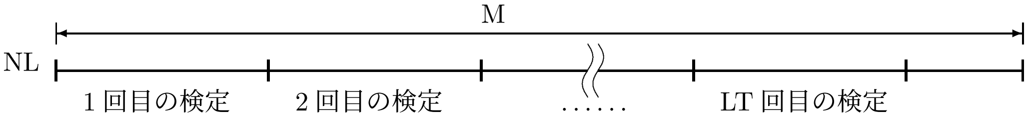
(e) $\mathrm{IUP} > 0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	IUP が大きすぎるまたは M が小さすぎる. (注意事項 (b) 参照)	処理を続ける. (検定精度が悪くなる)
3000	制限条件 (a), (b), (c), (d) または (e) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
4000	$\mathrm{NL(I)} < 0 \quad (\mathrm{I} = 1, \cdots, \mathrm{M})$	

(6) **注意事項**

(a) 乱数の総数 M および検定繰り返し数 LT と検定に使用する乱数 NL との関係



(b) 検定範囲の上限 IUP を大きくしすぎると, 非常に小さな期待度数の範囲を検定することになり, 検定精度が悪くなる.
このサブルーチンでは, 部分区間ごとの期待度数 F_{Ti} とすると, 以下の条件の場合,
IERR=1000 としている.

$$\mathrm{F_{Ti}} < 5 \qquad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{N})$$

次に目安となる IUP の値は次の式を満足するように決める.

$$\frac{\mathrm{AM}^{\mathrm{IUP}}}{\mathrm{IUP!}} = \frac{5 \times \mathrm{e}^{\mathrm{AM}}}{\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor}$$

ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.
たとえば, AM の 3 つの異なる値に対する IUP の値は次表に示すようになる.

		$\lfloor \mathrm{M/LT} \rfloor$			
		100	1, 000	10, 000	100, 000
AM	1.0	3	4	6	7
	5.0	8	11	13	15
	10.0	14	18	21	24

(7) **使用例**

(a) 問 題
平均値 1.0 のポアソン分布乱数を 10000 個発生し, 10 回検定する.

(b) 主プログラム

```
      PROGRAM BJTEPO
! *** EXAMPLE OF RJTEPO ***
      PARAMETER ( M=10000, L=10   , IUP=4       )
      DIMENSION  NL(M) , X2(L) , IWK1(100), WK1(100) , WK(IUP+1,2)
!
      WRITE(6,1000)
      IX = 1
      IY = 1
      AM = 1.0
      IWK1(1) = 0
      WK1 (1) = 0.0
!
      CALL RJDBPO ( M,AM,IX,IY,NL,IWK1,WK1,IERR )
!
      ALF = 1.0
      WRITE(6,1100) M,L,IUP,ALF,AM
!
      CALL RJTEPO ( NL,M,L,IUP,ALF,AM,K,X2,CX,WK,IERR )
!
      WRITE(6,1200) IERR
      WRITE(6,1300) K
      WRITE(6,1400) (X2(I),I=1,L)
      WRITE(6,1500) CX
      STOP
 1000 FORMAT(' ',/,/,' *** RJTEPO ***',/)
 1100 FORMAT('    **  INPUT  **',/,10X,'  M = ',I5,5X,'  L = ',I5,/,&
      10X,' IUP= ',I5,5X,' ALF= ',F5.1,/,10X,' AM = ',F5.1,/)
 1200 FORMAT('    **  OUTPUT  **',/,/,10X,' IERR = ',I5,/)
 1300 FORMAT(10X,' NUMBER OF PASSED TEST (K) = ',I3,/)
 1400 FORMAT(10X,'TEST NO.     1       2       3       4       5   ',&
                    '    6       7       8       9      10   ',/,/,&
             8X,'CHI-SQUARE',/,8X,'VALUE (X2)',10F8.1,/)
 1500 FORMAT(10X,' CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) = ',F8.1)
      END
```

(c) 出力結果

```
*** RJTEPO ***

   **  INPUT  **
           M = 10000       L =    10
          IUP=     4      ALF=   1.0
          AM =   1.0

   **  OUTPUT  **

          IERR =     0

          NUMBER OF PASSED TEST (K) =  10

         TEST NO.     1       2       3       4       5       6       7       8       9      10

       CHI-SQUARE
       VALUE (X2)     4.7     9.2     7.9     2.7     2.2     5.6     5.1     1.5     1.0     2.4

          CHI-SQUARE VALUE FOR PERCENT POINT (CX) =     13.3
```

第 3 章　確率分布

3.1　概 要

統計解析では各種データに対して確率変数と呼ばれる変数を対応させて, 推定や検定等の処理を行う. 確率変数は, その実現値が $x_1, x_2, \cdots$ というように離散値を用いて表せる場合に対応する**離散型確率変数**と $0 < x < 1$ というように連続区間内の任意の値をとる場合に対応する**連続型確率変数**に大別される. 離散型確率変数では, その確率変数 (X) が特定の値 (x) を取る確率 $(Pr.\{X = x\})$ を考えることができるが, 連続型確率変数では, 確率変数 (X) の実現値が存在する区間内の任意の部分空間 $([a, b))$ 内の値を取る確率 $(Pr.\{a \leq X < b\})$ を考える. 確率変数 X が微小区間 $[x, x + dx)$ の任意の値を取る確率 $Pr.\{x \leq X < x + dx\}$ を用いて

$$\int_x^{x+dx} f(u)du = Pr.\{x \leq X < x + dx\} \ (dx \to 0)$$

を満たす「関数」$f(x)$ を連続型確率変数 X の確率密度関数 (probability density function; p.d.f.) と呼ぶ. なお, 確率の定義より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$$

である. 通常, 確率変数 X の値が定義されない区間については $f(x)$ の値は 0 とする. 一方, 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.) $F(x)$ は確率密度関数 $f(x)$ の積分として

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

と定義する. なお, 実用上は, 分布関数として次式で定義される $G(x)$ を用いることもある.

$$G(x) = 1 - F(x) = \int_x^{\infty} f(u)du$$

これらの関係は多変数の場合にも容易に拡張できる. 確率密度関数や確率分布関数のより厳密な定義や連続型と離散型との統一的な扱い等については専門書を参照されたい.

本ライブラリでは, 以下の様な確率分布の確率密度関数や分布関数またはその逆関数の値の計算を行うための機能を用意している.

- 正規分布
- 逆正規分布
- 2 次元正規分布
- χ^2 分布
- 逆 χ^2 分布
- 偏心 χ^2 分布
- 逆偏心 χ^2 分布
- t 分布
- 逆 t 分布

- 偏心 t 分布
- 逆偏心 t 分布
- F 分布
- 逆 F 分布
- ガンマ分布
- 逆ガンマ分布
- ベータ分布
- 逆ベータ分布
- 一様分布
- 三角分布
- パレート分布
- ワイブル分布
- 指数分布
- ガンベル分布
- 対数分布
- 対数正規分布
- ロジスティック分布
- コーシー分布
- 2 項分布・負の 2 項分布
- 幾何分布
- ポアソン分布
- 超幾何分布
- 負の超幾何分布

3.1.1 解説

(1) **正規分布**

平均が μ, 分散が σ^2 である正規分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0)$$

で定義される．

(2) χ^2 **分布**

度数が χ^2, 自由度が ν である χ^2 分布の確率密度関数は

$$f(\chi^2|\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}} & (\chi^2 > 0) \\ 0 & (\chi^2 \leq 0) \end{cases}$$

で定義される．χ^2 分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[\chi^2(\nu)] = \nu, \sigma^2[\chi^2(\nu)] = 2\nu$$

で与えられる．

(3) **偏心** χ^2 **分布**

度数が χ^2, 自由度が ν, 偏心度が λ である偏心 χ^2 分布の確率密度関数は

$$f(x|\nu,\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(x+\lambda)}{2}}x^{\frac{(\nu-2)}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^k}{2^{2k}k!\Gamma(\frac{\nu}{2}+k)} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

で定義される．

(4) t **分布**

度数 t, 自由度が ν である t 分布の確率密度関数は

$$f(t|\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})(1+\frac{t^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

で定義される．t 分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[t(\nu)] = 0, \sigma^2[t(\nu)] = \frac{\nu}{\nu-2} \ (\nu > 2)$$

で与えられる．

(5) **偏心** t **分布**

度数 t, 自由度が ν, 偏心度が δ である t 分布の確率密度関数は

$$f(t|\nu,\delta) = \frac{\nu^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu+t^2)^{\frac{(\nu+1)}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(\frac{\nu+k+1}{2})\frac{\delta^k}{k!}(\frac{2t^2}{\nu+t^2})^{\frac{k}{2}}$$

で定義される．

(6) F **分布**

度数 F, 自由度 ν_1, ν_2 である F 分布の確率密度関数は

$$f(x|\nu_1,\nu_2)=\frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\cdot\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\cdot x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{B(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2})(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}=\frac{1}{B(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2})}(\frac{\nu_1}{\nu_2})^{\frac{\nu_1}{2}}(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}x^{\frac{\nu_1}{2}-1}$$

F 分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[F]=\frac{\nu_2}{\nu_2-2}\ (\nu_2>2),\sigma^2[F]=\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}\ (\nu_2>4)$$

で与えられる.

(7) **ガンマ分布**

母数が α, β であるガンマ分布の確率密度関数は

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & (x>0;\alpha,\beta>0)\\ 0 & (x\leq 0;\alpha,\beta>0)\end{cases}$$

で定義される. ガンマ分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[x]=\frac{\alpha}{\beta},\sigma^2[x]=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

で与えられる.

(8) **ベータ分布**

母数が a, b であるベータ分布の確率密度関数は

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} & (0<x<1;a,b>0)\\ 0 & (x\leq 0,x\geq 1;a,b>0)\end{cases}$$

で定義される.

(9) **一様分布**

区間 (a,b) 内の一様分布の確率密度関数は

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & (a\leq x\leq b)\\ 0 & (x<a,x>b)\end{cases}$$

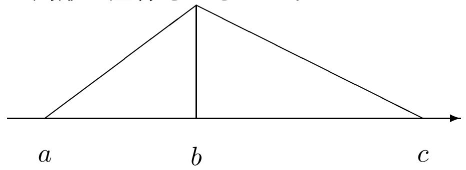
で定義される. 一様分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[x]=\frac{a+b}{2},\sigma^2[x]=\frac{(b-a)^2}{12}$$

で与えられる.

(10) **三角分布**

三角形の座標をつぎのようにとる.



a:三角分布の左端の x 座標
b:三角分布の頂点の x 座標
c:三角分布の右端の x 座標
この時の三角分布の確率密度関数は

$$f(x;a,b,c) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & (a \leq x \leq b) \\ \dfrac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} & (b < x \leq c) \\ 0 & (x < a, x > c) \end{cases}$$

で定義される．

(11) **パレート分布**
$a, b(a > 1, b > 0)$ を母数とするパレート分布の確率密度関数は

$$f(x;a,b) = \begin{cases} (a-1)(\frac{x}{b})^{-a}\frac{1}{b} & (x > b; a > 1, b > 0) \\ 0 & (x \leq b; a > 1, b > 0) \end{cases}$$

で定義される．

(12) **ワイブル分布**
$a, b(a > 0, b > 0)$ を母数とするワイブル分布の確率密度関数は

$$f(x;a,b) = \begin{cases} a\left(\dfrac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-(\frac{x}{b})^a}\dfrac{1}{b} & (0 < x; a, b > 0) \\ 0 & (x \leq 0; a, b > 0) \end{cases}$$

で定義される．

(13) **指数分布**
母数 α が 1 であるガンマ分布を指数分布とよぶ．指数分布では母数は β の代わりに λ を用いる．確率密度関数は

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0; \lambda > 0) \\ 0 & (x \leq 0; \lambda > 0) \end{cases}$$

で定義される．指数分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[x] = \frac{1}{\lambda}, \sigma^2[x] = \frac{1}{\lambda^2}$$

で与えられる．

(14) **ガンベル分布**
a, b を母数とするガンベル分布の確率密度関数は

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b}e^{\frac{x-a}{b}}e^{-e^{\frac{x-a}{b}}}$$

で定義される．

(15) **対数分布**
区間 (a, b) 内の対数分布の確率密度関数は

$$f(x;a,b) = \frac{\log x}{b(\log b - 1) - a(\log a - 1)}$$

で定義される．

(16) **対数正規分布**

平均が $e^{\mu}\sqrt{e^{\sigma^2}}$, 分散が $e^{2\mu}e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ である対数正規分布の確率密度関数は

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0)$$

で定義される.

(17) **ロジスティック分布**

平均が α, 分散が σ^2 であるロジスティック分布の確率密度関数は

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta\left\{1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right\}^2}$$
$$(-\infty < x < \infty, -\infty < \alpha < \infty, \beta > 0)$$
$$\sigma^2 = \frac{\pi^2\beta^2}{3}$$

で定義される.

(18) **コーシー分布**

α, $\beta(\beta > 0)$ を母数とするコーシー分布の確率密度関数は

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\beta}{\beta^2+(x-\alpha)^2}\right] \quad (\beta > 0)$$

で定義される.

(19) **2 項分布・負の 2 項分布**

事象がおこる確率 p と試行回数 n と出現回数 m を与えた時, 出現回数 m における 2 項分布の確率は

$$P_{BIN}(X=m;p,n) = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} p^m \cdot q^{n-m} \quad (q = 1-p)$$

で定義される. 2 項分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[m] = np, \sigma^2[m] = np(1-p)$$

で与えられる. 1 回の試行での成功確率 p と繰り返し試行における成功回数 n と失敗回数 m を与えた時, 失敗回数 m における負の 2 項分布の確率は

$$P_{NB}(X=m;p,n) = \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m \end{pmatrix} p^n \cdot q^m \quad (q = 1-p)$$

で定義される. 負の 2 項分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[m] = \frac{n}{p}, \sigma^2[m] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

で与えられる.

(20) **幾何分布**

ベルヌーイ試行において, 第 m 回目の試行で初めて成功する確率が p のとき, 次式で定義される幾何分布の確率 $P_{NB}(X=m;p)$ は

$$P_{NB}(X=m;p) = q^{m-1}p \qquad (q = 1-p)$$

で定義される．幾何分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[m] = \frac{1}{p}, \sigma^2[m] = \frac{q}{p^2}$$

で与えられる．

(21) **ポアソン分布**

平均 λ と確率変数 k を与えた時, ポアソン分布の確率 $Pr.\{X = k\}$ は

$$Pr.\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots; \lambda > 0)$$

で定義される．

(22) **超幾何分布**

大きさ N のロットがあり N 個中 M 個が不良品で $N - M$ 個が良品であるものとし, これから大きさ n の任意標本を抽出する場合に k 個の不良品が出現する確率分布に対応する超幾何分布の確率 $Pr.\{X = k\}$ は

$$Pr.\{X = k\} = \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N - M \\ n - k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} & k = 0, 1, 2, \cdots, \min\{M, n\} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定義される．超幾何分布の期待値と分散はそれぞれ

$$E(X) = np, \sigma^2(X) = \frac{N - k}{N - 1}np(1 - p) \quad (p = \frac{M}{N})$$

で与えられる．

(23) **負の超幾何分布**

大きさ NN のロットがあり，NN 個中 M 個が不良品で $NN - M$ 個が良品であるものとし，これからちょうど n 個の不良品が出現するまで任意標本を抽出する．この場合に抽出された標本の大きさが k となる確率 $Pr.\{X = k\}$ が従う確率分布を負の超幾何分布という．この確率分布の確率 $Pr.\{X = k\}$ またはその分布関数 $F(k)$ の値を求める．超幾何分布の確率 $Pr.\{X = k\}$ と分布関数 $F(k)$ は次式で定義される．

$$Pr.\{X = k\} = \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} M \\ NN - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} NN - M \\ k - n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} NN \\ k - 1 \end{pmatrix}} \times \dfrac{M - n + 1}{NN - k + 1} & \\ = \dfrac{\begin{pmatrix} k - 1 \\ n - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} NN - k \\ M - n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} NN \\ M \end{pmatrix}} & k = n, n + 1, n + 2, \cdots, NN - M + n \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$F(k) = \sum_{i=n}^{k} Pr.\{X = i\} = \frac{\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} i - 1 \\ n - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} NN - i \\ M - n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} NN \\ M \end{pmatrix}}$$

3.1.2 参考文献

(1) 武藤眞介, “統計解析ハンドブック”, 朝倉書店 (1995).

3.2 連続分布

3.2.1 D1CDNO, R1CDNO 正規分布

(1) **機 能**

平均が μ, 分散が σ^2 である正規分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0)$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (\sigma > 0)$$

(c) 分布関数

$$Q(x) = 1 - P(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (\sigma > 0)$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDNO (XE, XV, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDNO (XE, XV, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	XE	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	平均 μ の値
2	XV	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	分散 σ^2 の値
3	XI	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	1	出 力	正規分布の確率密度関数 $f(x)$ または分布関数 $P(x)$ または $Q(x)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) XV > 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) $P(x) + Q(x) = 1$ の関係式より, $P(x)$ または $Q(x)$ の一方から他方を求めることは可能であるが, 桁落ちが発生し, 精度良く求められない場合がある.

(b) 母数 μ, σ を持つ正規分布に従う確率変数は普通 $N(\mu, \sigma^2)$ で表す. $\mu = 0$, $\sigma = 1$ である場合の確率変数 $N(0, 1)$ は標準正規確率変数とよび, その確率分布を標準正規分布と呼ぶ.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\mu = 5.0$, $\sigma^2 = 2.5$, $x = 3.0$ として確率密度関数 $f(x)$, 分布関数 $P(x)$ および $Q(x)$ の値を求める.

(b) 入力データ

XE $= 5.0$, XV $= 2.5$, XI $= 3.0$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDNO
! *** EXAMPLE OF D1CDNO ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) XE,XV,XI,XO
!
      XE=5.0D0
      XV=2.5D0
      XI=3.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) XE
      WRITE(6,2010) XV
      WRITE(6,2020) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDNO(XE,XV,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDNO(XE,XV,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDNO(XE,XV,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDNO ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'XE = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XV = ',F4.1)
 2020 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDNO ***
 ** INPUT **
    XE =  5.0
    XV =  2.5
    XI =  3.0

 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE OF P.D.F =  0.1133716522D+00
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(1) =  0.1029516054D+00
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(2) =  0.8970483946D+00
```

3.2.2 D1CDIN, R1CDIN 逆正規分布

(1) **機 能**

平均が μ, 分散が σ^2 である正規分布の分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.) $P(x)$ または, $Q(x)$ を与えて, そのときの確率変数の値 x を求める. $P(x)$ と $Q(x)$ は次式で定義される.

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (\sigma > 0)$$

$$Q(x) = 1 - P(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (\sigma > 0)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDIN (XE, XV, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDIN (XE, XV, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	XE	{D/R}	1	入 力	平均 μ の値
2	XV	{D/R}	1	入 力	分散 σ^2 の値
3	XI	{D/R}	1	入 力	正規分布の分布関数の値 $P(x)$ または $Q(x)$
4	XO	{D/R}	1	出 力	確率変数 x の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=1:XI に $P(x)$ の値を入力する ISW=2:XI に $Q(x)$ の値を入力する
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{1, 2\}$

(b) XV > 0.0

(c) $0.0 \leq$ XI ≤ 1.0

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI = 0.0 または XI = 1.0	XO に正の最大値または負の最小値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3500	所定の精度が得られる前に最大反復数に達した.	その時の値を返す

(6) 注意事項

(a) 母数 μ, σ を持つ正規分布に従う確率変数は普通 $N(\mu, \sigma^2)$ で表す. $\mu = 0$, $\sigma = 1$ である場合の確率変数 $N(0, 1)$ は標準正規確率変数とよび, その確率分布を標準正規分布と呼ぶ.

(7) 使用例

(a) 問 題

$\mu = 5.0$, $\sigma^2 = 2.5$, について $P(x) = 0.2$, $Q(x) = 0.2$ となる x の値をそれぞれ求める.

(b) 入力データ

XE = 5.0, XV = 2.5, XI = 0.2

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDIN
! *** EXAMPLE OF D1CDIN ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) XE,XV,XI,XO
!
      XE=5.0D0
      XV=2.5D0
      XI=0.2D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) XE
      WRITE(6,2010) XV
      WRITE(6,2020) XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=1
      CALL D1CDIN(XE,XV,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDIN(XE,XV,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDIN ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'XE = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XV = ',F4.1)
 2020 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE X CORRESPONDING TO P(X)=XI: ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE X CORRESPONDING TO Q(X)=XI: ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDIN ***
 ** INPUT **
    XE =  5.0
    XV =  2.5
    XI =  0.2


 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE X CORRESPONDING TO P(X)=XI:  0.3669279987D+01
    IERR =    0
    VALUE X CORRESPONDING TO Q(X)=XI:  0.6330720013D+01
```

3.2.3 D1CDBN, R1CDBN
2 次元正規分布

(1) **機 能**

平均が μ_x, μ_y, 分散が ${\sigma_x}^2, {\sigma_y}^2$, 相関係数が ρ である 2 次元正規分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{Q}{2(1-\rho^2)}} \quad (\sigma_x, \sigma_y > 0)$$

ここで,

$$Q = \frac{(x-\mu_x)^2}{{\sigma_x}^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{{\sigma_y}^2} \quad (\sigma_x, \sigma_y > 0)$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$B(h,k;\rho) = \int_{-\infty}^{h}\int_{-\infty}^{k} f(x,y)\ dxdy$$

(c) 分布関数

$$L(h,k;\rho) = \int_{h}^{\infty}\int_{k}^{\infty} f(x,y)\ dxdy$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDBN (XE, YE, XV, YV, XH, YK, RHO, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDBN (XE, YE, XV, YV, XH, YK, RHO, XO, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{ \begin{array}{l} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{array} \right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	XE	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	平均 μ_x の値
2	YE	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	平均 μ_y の値
3	XV	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	分散 ${\sigma_x}^2$ の値
4	YV	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	分散 ${\sigma_y}^2$ の値
5	XH	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	ISW=0:確率変数 x の値 ISW=1:確率変数 x の積分範囲の上限 h ISW=2:確率変数 x の積分範囲の下限 h
6	YK	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	ISW=0:確率変数 y の値 ISW=1:確率変数 y の積分範囲の上限 k ISW=2:確率変数 y の積分範囲の下限 k
7	RHO	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	相関係数 ρ の値
8	XO	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	出 力	2 次元正規分布の確率密度関数 $f(x,y)$ または分布関数 $B(h,k;\rho)$ または $L(h,k;\rho)$ の値
9	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x,y)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $B(h,k;\rho)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $L(h,k;\rho)$ の値を求める
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $\mathrm{ISW} \in \{0,1,2\}$

(b) $\mathrm{XV}, \mathrm{YV} > 0.0$

(c) $-1.0 \leq \rho \leq 1.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3500	所定の精度が得られる前に最大反復数に達した.	その時の値を返す.

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\mu_x = 1.0, \mu_y = 2.0, {\sigma_x}^2 = 3.0, {\sigma_y}^2 = 4.0,\ x = h = 5.0, y = k = 6.0, \rho = 0.7$ として確率密度関数 $f(x, y)$, 分布関数 $B(h, k; \rho)$ および $L(h, k; \rho)$ の値を求める.

(b) 入力データ

$\mathrm{XE} = 1.0, \mathrm{YE} = 2.0, \mathrm{XV} = 3.0, \mathrm{YV} = 4.0, \mathrm{XH} = 5.0, \mathrm{YK} = 6.0, \mathrm{RHO} = 0.7$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDBN
! *** EXAMPLE OF D1CDBN ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) XE,YE,XV,YV,XH,YK,RHO,XO
!
      XE=1.0D0
      YE=2.0D0
      XV=3.0D0
      YV=4.0D0
      XH=5.0D0
      YK=6.0D0
      RHO=0.7D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) XE,YE
      WRITE(6,2010) XV,YV
      WRITE(6,2020) XH,YK
      WRITE(6,2030) RHO
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDBN(XE,YE,XV,YV,XH,YK,RHO,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDBN(XE,YE,XV,YV,XH,YK,RHO,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDBN(XE,YE,XV,YV,XH,YK,RHO,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDBN ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'XE = ',F4.1,'  YE = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XV = ',F4.1,'  YV = ',F4.1)
 2020 FORMAT(9X,'XH = ',F4.1,'  YK = ',F4.1)
 2030 FORMAT(9X,'RHO = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDBN ***
      ** INPUT **
```

```
    XE =  1.0  YE =  2.0
    XV =  3.0  YV =  4.0
    XH =  5.0  YK =  6.0
    RHO =  0.7

** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE OF P.D.F =  0.3870186645D-02
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(1) =  0.9711871129D+00
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(2) =  0.4397912483D-02
```

3.2.4 D1CDCH, R1CDCH
χ^2 分布

(1) **機 能**

度数が χ^2, 自由度が ν である χ^2 分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(\chi^2|\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})}(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}} & (\chi^2 > 0) \\ 0 & (\chi^2 \leq 0) \end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(\chi^2|\nu) = \int_0^{\chi^2} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})}(t)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt \quad (0 \leq \chi^2 < \infty)$$

(c) 分布関数

$$Q(\chi^2|\nu) = 1 - P(\chi^2|\nu) = \int_{\chi^2}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})}(t)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt \quad (0 \leq \chi^2 < \infty)$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDCH (N, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDCH (N, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{ \begin{array}{l} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{array} \right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	N	I	1	入 力	自由度 ν の値
2	XI	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	度数 χ^2 の値
3	XO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	χ^2 分布の確率密度関数 $f(\chi^2\|\nu)$ または分布関数 $P(\chi^2\|\nu)$ または $Q(\chi^2\|\nu)$ の値
4	ISW	I	1	入 力	ISW=0:XO に確率密度関数 $f(\chi^2\|\nu)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(\chi^2\|\nu)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(\chi^2\|\nu)$ の値を求める
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) N ≥ 1

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI $\leq$ 0.0	XO に 0.0 または 1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) $P(\chi^2|\nu) + Q(\chi^2|\nu) = 1$ の関係式より, $P(\chi^2|\nu)$ または $Q(\chi^2|\nu)$ の一方から他方を求めることは可能であるが, 桁落ちが発生し, 精度良く求められない場合がある.

(b) 自由度 n の χ^2 分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[\chi^2(n)] = n, \sigma^2[\chi^2(n)] = 2n$$

で与えられる.

(c) 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を u とするとき, u^2 の分布は自由度 1 の χ^2 分布である.

(d) $X_i (i = 1, \cdots, n)$ を平均 μ, 分散 σ^2 の正規母集団 $(N(\mu, \sigma^2))$ から抽出された大きさ n の任意の標本の確率変数としたとき

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \quad \text{および} \quad \frac{n(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$$

はそれぞれ自由度 $n-1$ および自由度 1 の χ^2 分布に従い, かつ互いに独立である.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\chi^2 = 5.0, \nu = 2$ として確率密度関数 $f(\chi^2|\nu)$, 分布関数 $P(\chi^2|\nu)$ および $Q(\chi^2|\nu)$ の値を求める.

(b) 入力データ

XI = 5.0, N = 2

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDCH
! *** EXAMPLE OF D1CDCH ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N,ISW
      REAL(8) XI,XO
!
      N=2
      XI=5.0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDCH(N,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDCH(N,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDCH(N,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDCH ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
```

```
2000 FORMAT(9X,'N  = ',I3)
2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
     END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDCH ***
 ** INPUT **
    N  =   2
    XI =  5.0


 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE OF P.D.F =  0.4104249931D-01
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(1) =  0.9179150014D+00
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(2) =  0.8208499862D-01
```

3.2.5 D1CDIC, R1CDIC 逆 χ^2 分布

(1) **機 能**

自由度が ν である χ^2 分布の分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.) $P(\chi^2|\nu)$ または, $Q(\chi^2|\nu)$ を与えて, そのときの度数 χ^2 を求める. $P(\chi^2|\nu)$ と $Q(\chi^2|\nu)$ は次式で定義される.

$$P(\chi^2|\nu) = \int_0^{\chi^2} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})}(t)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt \quad (0 \le \chi^2 < \infty)$$

$$Q(\chi^2|\nu) = 1 - P(\chi^2|\nu) = \int_{\chi^2}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})}(t)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt \quad (0 \le \chi^2 < \infty)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDIC (N, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDIC (N, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	自由度 ν の値
2	XI	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	入 力	χ^2 分布の分布関数 $P(\chi^2\|\nu)$ または $Q(\chi^2\|\nu)$ の値
3	XO	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	出 力	度数 χ^2 の値
4	ISW	I	1	入 力	ISW=1:XI に分布関数 $P(\chi^2\|\nu)$ の値を入力する ISW=2:XI に分布関数 $Q(\chi^2\|\nu)$ の値を入力する
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\text{ISW} \in \{1, 2\}$

(b) $\text{N} \ge 1$

(c) $0.0 \le \text{XI} \le 1.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI=0.0 または XI=1.0	XO に 0.0 または正の最大値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3500	所定の精度が得られる前に最大反復数に達した.	その時の値を返す
4000	サブルーチン 3.2.4 $\left\{\begin{matrix}\text{D1CDCH}\\\text{R1CDCH}\end{matrix}\right\}$ でエラーが発生した.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 自由度 n の χ^2 分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[\chi^2(n)] = n, \sigma^2[\chi^2(n)] = 2n$$

で与えられる.

(b) 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を u とするとき, u^2 の分布は自由度 1 の χ^2 分布である.

(c) $X_i(i = 1, \cdots, n)$ を平均 μ, 分散 σ^2 の正規母集団 $(N(\mu, \sigma^2))$ から抽出された大きさ n の任意の標本の確率変数としたとき

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \text{および} \frac{n(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$$

はそれぞれ自由度 $n-1$ および自由度 1 の χ^2 分布に従い, かつ互いに独立である.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\nu = 2$ について $P(\chi^2|\nu) = 0.2$, $Q(\chi^2|\nu) = 0.2$ となる χ^2 の値をそれぞれ求める.

(b) 入力データ

XI = 0.2, N = 2

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDIC
! *** EXAMPLE OF D1CDIC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N,ISW
      REAL(8) XI,XO
!
      N=2
      XI=0.2
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=1
      CALL D1CDIC(N,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDIC(N,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
```

```
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDIC ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N  = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE X CORRESPONDING TO P(X,N)=XI: ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE X CORRESPONDING TO Q(X,N)=XI: ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDIC ***
      ** INPUT **
         N  =   2
         XI =  0.2


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE X CORRESPONDING TO P(X,N)=XI:  0.4462871101D+00
         IERR =    0
         VALUE X CORRESPONDING TO Q(X,N)=XI:  0.3218875795D+01
```

3.2.6 D1CDNC, R1CDNC
偏心χ^2 分布

(1) **機 能**

度数 χ^2 の値が x, 自由度が ν, 偏心度が λ である偏心 χ^2 分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x|\nu,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{(x+\lambda)}{2}} x^{\frac{(\nu-2)}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^k}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{\nu}{2}+k)} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x|\nu,\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}} (\frac{\lambda}{2})^k}{k!} \int_0^x \frac{t^{\frac{(\nu+2k)}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{\nu+2k}{2}} \Gamma(\dfrac{\nu+2k}{2})} dt & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

(c) 分布関数

$$Q(x|\nu,\lambda) = \begin{cases} 1 - P(x|\nu,\lambda) & (x > 0) \\ 1 & (x \le 0) \end{cases}$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDNC (N, XL, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDNC (N, XL, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	N	I	1	入 力	自由度 ν の値
2	XL	{D / R}	1	入 力	偏心度 λ の値
3	XI	{D / R}	1	入 力	度数 χ^2 の値
4	XO	{D / R}	1	出 力	χ^2 分布の確率密度関数 $f(x\|\nu,\lambda)$ または分布関数 $P(x\|\nu,\lambda)$ または $Q(x\|\nu,\lambda)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x\|\nu,\lambda)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x\|\nu,\lambda)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x\|\nu,\lambda)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) N ≥ 1

(c) XL ≥ 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI ≤ 0.0	XO に 0.0 または 1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) または (c) を満足しなかった.	
3500	所定の精度が得られる前に最大反復回数に達した.	その時の値を返す

(6) **注意事項**

(a) 自由度 ν, または, 偏心度 λ が 1000 以上の場合, 関数値が求まらない場合がある.

(b) $P(x|\nu,\lambda) + Q(x|\nu,\lambda) = 1$ の関係式より, $P(x|\nu,\lambda)$ または $Q(x|\nu,\lambda)$ の一方から他方を求めることは可能であるが, 桁落ちが発生し, 精度良く求められない場合がある.

(c) 自由度 ν, 偏心度 λ の偏心 χ^2 分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[\chi'^2(\nu,\lambda)] = a \quad , \quad \sigma^2[\chi'^2(\nu,\lambda)] = 2a(1+b)$$

で与えられる. ただし,

$$a = \nu + \lambda \quad , \quad b = \frac{\lambda}{\nu + \lambda}$$

(d) 偏心度 $\lambda = 0.0$ の偏心 χ^2 分布は χ^2 分布と一致する.

(e) $X_i (i = 1, \cdots, n)$ を平均 μ_i, 分散 ${\sigma_i}^2 = 1$ の正規母集団 $(N_i(\mu_i, {\sigma_i}^2 = 1))$ からそれぞれ抽出された確率変数とし,

$$Z = \sum_{i=0}^{n} {X_i}^2$$

とすると, Z は, 自由度 n, 偏心度

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n} {\mu_i}^2$$

の偏心 χ^2 分布に従う.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\nu = 2, \quad \lambda = 1.0, \quad x = 5.0$ として確率密度関数 $f(x|\nu,\lambda)$, 分布関数 $P(x|\nu,\lambda)$ および $Q(x|\nu,\lambda)$ の値を求める.

(b) 入力データ

N = 2,　XL = 1.0,　XI = 5.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDNC
! *** EXAMPLE OF D1CDNC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER N,IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) XL,XI,XO
!
      N=2
      XL=1.0
      XI=5.0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N,XL
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDNC(N,XL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDNC(N,XL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDNC(N,XL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDNC ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N = ',I4,'  XL = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
    *** D1CDNC ***
     ** INPUT **
        N =    2  XL =  1.0
        XI =  5.0


     ** OUTPUT **
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F =  0.6719602550D-01
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F(1) =  0.8107099626D+00
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F(2) =  0.1892900374D+00
```

3.2.7 D1CDIX, R1CDIX 逆偏心 χ^2 分布

(1) **機 能**

自由度が ν, 偏心度が λ である偏心 χ^2 分布の分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.), $P(x|\nu,\lambda)$ または $Q(x|\nu,\lambda)$ を与えて, そのときの度数 χ^2 の値 x を求める. $P(x|\nu,\lambda)$ と $Q(x|\nu,\lambda)$ は次式で定義される.

$$P(x|\nu,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}(\frac{\lambda}{2})^k}{k!}\int_0^x\frac{t^{\frac{(\nu+2k)}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{\nu+2k}{2}}\Gamma(\frac{\nu+2k}{2})}dt \quad (0\le x<\infty)$$

$$Q(x|\nu,\lambda)=1-P(x|\nu,\lambda) \quad (0\le x<\infty)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDIX (N, XL, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDIX (N, XL, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\\text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	自由度 ν の値
2	XL	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	入 力	偏心度 λ の値
3	XI	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	入 力	χ^2 分布の分布関数 $P(x|\nu,\lambda)$ または $Q(x|\nu,\lambda)$ の値
4	XO	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	出 力	度数 χ^2 の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1:XI に分布関数 $P(x|\nu,\lambda)$ の値を入力する ISW=2:XI に分布関数 $Q(x|\nu,\lambda)$ の値を入力する
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in\{1,2\}$

(b) N ≥ 1

(c) $\lambda\geq 0.0$

(d) $0.0\leq$ XI ≤ 1.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI = 0.0 または XI = 1.0	XO に 0.0 または 最大値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) または (c) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3500	2 分法において上限の境界値が求められなかった.	XO に最大値をセットする
3600	所定の精度が得られる前に最大反復回数に達した.	その時の値を返す
4000	サブルーチン 3.2.6 $\left\{\begin{matrix}\text{D1CDNC}\\\text{R1CDNC}\end{matrix}\right\}$ でエラーが発生した.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 自由度 ν, 偏心度 λ の偏心 χ^2 分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[\chi^{'2}(\nu,\lambda)] = a \quad , \quad \sigma^2[\chi^{'2}(\nu,\lambda)] = 2a(1+b)$$

で与えられる. ただし,

$$a = \nu + \lambda \quad , \quad b = \frac{\lambda}{\nu+\lambda}$$

(b) 偏心度 $\lambda = 0.0$ の偏心 χ^2 分布は χ^2 分布と一致する.

(c) $X_i(i = 1,\cdots,n)$ を平均 μ_i, 分散 ${\sigma_i}^2 = 1$ の正規母集団 $(N_i(\mu_i,{\sigma_i}^2 = 1))$ からそれぞれ抽出された確率変数とし,

$$Z = \sum_{i=0}^{n} {X_i}^2$$

とすると, Z は, 自由度 n, 偏心度

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n} {\mu_i}^2$$

の偏心 χ^2 分布に従う.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\nu = 2$, $\lambda = 1.0$ について, 分布関数 $P(x|\nu,\lambda) = 0.7$ および $Q(x|\nu,\lambda) = 0.7$ となる x の値をそれぞれ求める.

(b) 入力データ

N = 2, XL = 1.0, XI = 0.7

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDIX
! *** EXAMPLE OF D1CDIX ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER N,IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) XL,XI,XO
!
```

```
      N=2
      XL=1.0
      XI=0.7
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N,XL
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=1
      CALL D1CDIX(N,XL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDIX(N,XL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDIX ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N = ',I4,'  XL = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,&
      'VALUE OF X CORRESPONDING TO P(X;N,XL) = XI:',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,&
      'VALUE OF X CORRESPONDING TO Q(X;N,XL) = XI:',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDIX ***
      ** INPUT **
         N =    2  XL =  1.0
         XI =  0.7


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE OF X CORRESPONDING TO P(X;N,XL) = XI: 0.3685399605D+01
         IERR =    0
         VALUE OF X CORRESPONDING TO Q(X;N,XL) = XI: 0.1144032357D+01
```

3.2.8 D1CDTB, R1CDTB
t 分布

(1) **機 能**

度数 t, 自由度が ν である t 分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(t|\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})(1+\frac{t^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(t|\nu) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})(1+\frac{x^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}dx$$

(c) 分布関数

$$Q(t|\nu) = \int_{t}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})(1+\frac{x^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}dx$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDTB (N, TI, TO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDTB (N, TI, TO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	N	I	1	入 力	自由度 ν
2	TI	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	度数 t の値
3	TO	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	t 分布の確率密度関数 $f(t\|\nu)$ または分布関数 $P(t\|\nu)$ または $Q(t\|\nu)$ の値
4	ISW	I	1	入 力	ISW=0: TO に確率密度関数 $f(t\|\nu)$ の値を求める ISW=1: TO に分布関数 $P(t\|\nu)$ の値を求める ISW=2: TO に分布関数 $Q(t\|\nu)$ の値を求める
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥1

(b) ISW∈{0, 1, 2}

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	
4000	演算の途中でオーバフローが発生した. (ISW=0 の時)	

(6) **注意事項**

(a) 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を u, 自由度 ν の χ^2 分布に従う確率変数を χ^2 とし, u と χ^2 とが互いに独立であれば次式で定義される確率変数 t は自由度 ν の t 分布に従う.

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

t=5.0, ν=2 として確率密度関数 $f(t|\nu)$, 分布関数 $P(t|\nu)$ および $Q(t|\nu)$ の値を求める.

(b) 入力データ

TI=5.0, N=2

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDTB
! *** EXAMPLE OF D1CDTB ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR,N,ISW
      REAL(8) TI,TO
!
      N=2
      TI=5.0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N
      WRITE(6,2010) TI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDTB(N,TI,TO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) TO
!
      ISW=1
      CALL D1CDTB(N,TI,TO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) TO
!
      ISW=2
      CALL D1CDTB(N,TI,TO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) TO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDTB ***',/,&
             6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N  = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'TI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F. = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F.(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F.(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDTB ***
 ** INPUT **
    N  =   2
    TI =  5.0

 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE OF P.D.F. =  0.7127781101D-02
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F.(1) =  0.9811252243D+00
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F.(2) =  0.1887477568D-01
```

3.2.9 D1CDIT, R1CDIT
逆 t 分布

(1) **機 能**

自由度が ν である t 分布の分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.) $P(t|\nu)$ または $Q(t|\nu)$ を与えて，そのときの度数 t を求める．$P(t|\nu)$ と $Q(t|\nu)$ は次式で定義される．

$$P(t|\nu) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma(\dfrac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})(1+\dfrac{x^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}} dx$$

$$Q(t|\nu) = \int_{t}^{\infty} \frac{\Gamma(\dfrac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})(1+\dfrac{x^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}} dx$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDIT (N, TI, TO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDIT (N, TI, TO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内 容
1	N	I	1	入 力	自由度 ν の値
2	TI	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	t 分布の分布関数の値 $P(t\|\nu)$ または $Q(t\|\nu)$
3	TO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	度数 t の値
4	ISW	I	1	入 力	ISW=1: TI に分布関数 $P(t\|\nu)$ の値を入力する ISW=2: TI に分布関数 $Q(t\|\nu)$ の値を入力する
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) 0.0≤TI≤1.0

(b) N≥1

(c) ISW∈{1, 2}

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	TI=0.0 であった.	TO に負の最小値または正の最大値を設定して処理を続ける.
1100	TI=1.0 であった.	TO に正の最大値または負の最小値を設定して処理を続ける.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3200	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) t 分布の両側確率に対するパーセント点を求めたい場合は, P に両側確率を 1/2 倍した値を与えると良い.

(b) 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を u, 自由度 ν の χ^2 分布に従う確率変数を χ^2 とし, u と χ^2 とが互いに独立であれば次式で定義される確率変数 t は自由度 ν の t 分布に従う.

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

ν=2 について $P(t|\nu)$=0.2, $Q(t|\nu)$=0.2 となる t の値を求める.

(b) 入力データ

TI=0.2, N=2

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDIT
! *** EXAMPLE OF D1CDIT ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR,N,ISW
      REAL(8) TI,TO
!
      N=2
      TI=0.2
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N
      WRITE(6,2010) TI
      WRITE(6,3000)
      ISW=1
      CALL D1CDIT(N,TI,TO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) TO
!
      ISW=2
      CALL D1CDIT(N,TI,TO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) TO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDIT ***',/,&
             6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N  = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'TI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE T CORRESPONDING TO P(X,N)=TI:',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE T CORRESPONDING TO Q(X,N)=TI:',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDIT ***
      ** INPUT **
         N  =   2
         TI =  0.2
```

```
** OUTPUT **
   IERR =     0
   VALUE T CORRESPONDING TO P(X,N)=TI:-0.1060660155D+01
   IERR =     0
   VALUE T CORRESPONDING TO Q(X,N)=TI: 0.1060660155D+01
```

3.2.10 D1CDNT, R1CDNT
偏心 t 分布

(1) **機 能**

度数 t, 自由度が ν, 偏心度が δ である偏心 t 分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(t|\nu,\delta)=\frac{\nu^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})(\nu+t^2)^{\frac{(\nu+1)}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(\frac{\nu+k+1}{2})\frac{\delta^k}{k!}(\frac{2t^2}{\nu+t^2})^{\frac{k}{2}}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(t|\nu,\delta)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\nu^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\dfrac{\nu}{2})(\nu+x^2)^{\frac{(\nu+1)}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(\frac{\nu+k+1}{2})\frac{\delta^k}{k!}(\frac{2x^2}{\nu+x^2})^{\frac{k}{2}}dx$$

(c) 分布関数

$$Q(t|\nu,\delta)=1-P(t|\nu,\delta)$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDNT (N, DEL, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDNT (N, DEL, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内 容
1	N	I	1	入 力	自由度 ν の値
2	DEL	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	偏心度 δ の値
3	XI	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	度数 t の値
4	XO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	t 分布の確率密度関数 $f(t\|\nu,\delta)$ または分布関数 $P(t\|\nu,\delta)$ または $Q(t\|\nu,\delta)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=0:XO に確率密度関数 $f(t\|\nu,\delta)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(t\|\nu,\delta)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(t\|\nu,\delta)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) N ≥ 1

(c) DEL ≥ 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI ≤ 0.0	XO に 0.0 または 1.0 をセットする.
2000	ISW = 0 にて, 十分な精度を満たす解が求められなかった.	求められた確率密度関数値を出力して処理を打ち切る.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) または (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) $P(t|\nu,\delta) + Q(t|\nu,\delta) = 1$ の関係式より, $P(t|\nu,\delta)$ または $Q(t|\nu,\delta)$ の一方から他方を求めることは可能であるが, 桁落ちが発生し, 精度良く求められない場合がある.

(b) 偏心度 $\delta = 0.0$ の偏心 t 分布は t 分布と一致する.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\nu = 2$,　$\delta = 1.0$,　$x = 5.0$ として確率密度関数 $f(t|\nu,\delta)$, 分布関数 $P(t|\nu,\delta)$ および $Q(t|\nu,\delta)$ の値を求める.

(b) 入力データ

N = 2 ,　DEL = 1.0 ,　XI = 5.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDNT
! *** EXAMPLE OF D1CDNT ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER N,IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) DEL,XI,XO
!
      N=2
      DEL=1.0
      XI=5.0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N,DEL
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDNT(N,DEL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDNT(N,DEL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDNT(N,DEL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDNT ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N = ',I4,'  DEL = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
```

```
4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
     END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDNT ***
 ** INPUT **
    N =    2  DEL =  1.0
    XI =  5.0

 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE OF P.D.F =  0.2533236257D-01
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(1) =  0.9301737669D+00
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(2) =  0.6982623314D-01
```

3.2.11 D1CDIS, R1CDIS 逆偏心 t 分布

(1) **機 能**

自由度が ν, 偏心度が δ である偏心 t 分布の分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.), $P(t|\nu,\delta)$ または $Q(t|\nu,\delta)$ を与えて, そのときの度数 t の値を求める. $P(t|\nu,\delta)$ と $Q(t|\nu,\delta)$ は次式で定義される.

$$P(t|\nu,\delta) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\nu^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu+x^2)^{\frac{(\nu+1)}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(\frac{\nu+k+1}{2}) \frac{\delta^k}{k!} (\frac{2x^2}{\nu+x^2})^{\frac{k}{2}} dx$$

$$Q(t|\nu,\delta) = 1 - P(t|\nu,\delta)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDIS (N, DEL, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDIS (N, DEL, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	自由度 ν の値
2	DEL	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	偏心度 δ の値
3	XI	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	t 分布の分布関数 $P(t|\nu,\delta)$ または $Q(t|\nu,\delta)$ の値
4	XO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	度数 t の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1:XI に分布関数 $P(t|\nu,\delta)$ の値を入力する ISW=2:XI に分布関数 $Q(t|\nu,\delta)$ の値を入力する
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0,1,2\}$

(b) N ≥ 1

(c) $\delta \geq 0.0$

(d) $0.0 \leq$ XI ≤ 1.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI = 0.0 または XI = 1.0	XO に最小値 または 最大値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) または (c) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3510	2 分法において下限の境界値が求められなかった.	XO に最小値をセットする
3520	2 分法において上限の境界値が求められなかった.	XO に最大値をセットする
3600	所定の精度が得られる前に最大反復回数に達した.	その時の値を返す
4000	サブルーチン 3.2.10 $\left\{\begin{matrix}\text{D1CDNT}\\ \text{R1CDNT}\end{matrix}\right\}$ でエラーが発生した.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 偏心度 $\delta = 0.0$ の偏心 t 分布は t 分布と一致する.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\nu = 2$,　$\delta = 1.0$ について, 分布関数 $P(t|\nu, \delta) = 0.7$ および $Q(t|\nu, \delta) = 0.7$ となる t の値を求める.

(b) 入力データ

N = 2 ,　DEL = 1.0 ,　XI = 0.7

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDIS
! *** EXAMPLE OF D1CDIS ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER N,IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) DEL,XI,XO
!
      N=2
      DEL=1.0
      XI=0.7
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N,DEL
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=1
      CALL D1CDIS(N,DEL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDIS(N,DEL,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDIS ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N = ',I4,'  DEL = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,&
      'VALUE OF X CORRESPONDING TO P(X;N,DEL) = XI:',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,&
      'VALUE OF X CORRESPONDING TO Q(X;N,DEL) = XI:',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDIS ***
 ** INPUT **
    N =    2  DEL =  1.0
    XI =  0.7


 ** OUTPUT **
    IERR =     0
    VALUE OF X CORRESPONDING TO P(X;N,DEL) = XI: 0.1963296797D+01
    IERR =     0
    VALUE OF X CORRESPONDING TO Q(X;N,DEL) = XI: 0.5208679536D+00
```

3.2.12 D1CDFB, R1CDFB
F 分布

(1) **機 能**

度数 F, 自由度 ν_1, ν_2 である F 分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(F|\nu_1,\nu_2)=\frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\cdot\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\cdot x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{B(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2})(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(F|\nu_1,\nu_2)=\int_0^F\frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\cdot\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\cdot x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{B(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2})(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}dx$$

(c) 分布関数

$$Q(F|\nu_1,\nu_2)=\int_F^\infty\frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\cdot\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\cdot x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{B(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2})(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}dx$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDFB (N1, N2, FI, FO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDFB (N1, N2, FI, FO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\\text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	N1	I	1	入 力	自由度 ν_1
2	N2	I	1	入 力	自由度 ν_2
3	FI	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	入 力	度数 F の値
4	FO	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	出 力	F 分布の確率密度関数 $f(F\|\nu_1,\nu_2)$ または分布関数 $P(F\|\nu_1,\nu_2)$ または $Q(F\|\nu_1,\nu_2)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0: FO に確率密度関数 $f(F\|\nu_1,\nu_2)$ の値を求める ISW=1: FO に分布関数 $P(F\|\nu_1,\nu_2)$ の値を求める ISW=2: FO に分布関数 $Q(F\|\nu_1,\nu_2)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) F>0.0

(b) N1≥1, N2≥1

(c) ISW∈{0, 1, 2}

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
2000	N1>2000, N2>2000 (ISW=0 の時)	得られた値の精度は保証されない.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3200	制限条件 (c) を満足しなかった.	
4000	$\lvert B(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})\rvert <$(正の最小値) (ISW=0 の時)	
4100	ベータ関数値を求める段階でエラーが発生した. (ISW=0 の時)	
4200	演算の途中でオーバフローが発生した. (ISW=0 の時)	

(6) **注意事項**

(a) 自由度 ν_1, ν_2 の χ^2 分布に従う確率変数をそれぞれ χ_1^2, χ_2^2 とし, χ_1^2 と χ_2^2 とが互いに独立であれば次式で定義される確率変数 F は自由度 ν_1, ν_2 の F 分布に従う.

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{\nu_1}}{\frac{\chi_2^2}{\nu_2}}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題
F=5.0, ν_1=2, ν_2=2 として確率密度関数 $f(F|\nu_1,\nu_2)$, 分布関数 $P(F|\nu_1,\nu_2)$ および $Q(F|\nu_1,\nu_2)$ の値を求める.

(b) 入力データ
FI=5.0, N1=2, N2=2

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDFB
! *** EXAMPLE OF D1CDFB ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR,N1,N2,ISW
      REAL(8) FI,FO
!
      N1=2
      N2=2
      FI=5.0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N1
      WRITE(6,2010) N2
      WRITE(6,2020) FI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDFB(N1,N2,FI,FO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) FO
!
      ISW=1
      CALL D1CDFB(N1,N2,FI,FO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) FO
!
      ISW=2
      CALL D1CDFB(N1,N2,FI,FO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) FO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDFB ***',/,&
             6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N1 = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N2 = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'FI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F.(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F.(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDFB ***
      ** INPUT **
         N1 =   2
         N2 =   2
         FI =  5.0


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE OF P.D.F =  0.2777777778D-01
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F.(1) =  0.8333333333D+00
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F.(2) =  0.1666666667D+00
```

3.2.13 D1CDIF, R1CDIF 逆 F 分布

(1) **機 能**

自由度が ν_1, ν_2 である F 分布の分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.) $P(F|\nu_1,\nu_2)$ または $Q(F|\nu_1,\nu_2)$ を与えて, そのときの度数 F を求める.

$P(F|\nu_1,\nu_2)$ と $Q(F|\nu_1,\nu_2)$ は次式で定義される.

$$P(F|\nu_1,\nu_2) = \int_0^F \frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \cdot \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \cdot x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{B(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2})(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}dx$$

$$Q(F|\nu_1,\nu_2) = \int_F^\infty \frac{\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \cdot \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \cdot x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{B(\frac{\nu_1}{2},\frac{\nu_2}{2})(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}dx$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDIF (N1, N2, FI, FO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDIF (N1, N2, FI, FO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	N1	I	1	入 力	自由度 (ν_1)
2	N2	I	1	入 力	自由度 (ν_2)
3	FI	{D / R}	1	入 力	F 分布の分布関数 $P(F\|\nu_1,\nu_2)$ または $Q(F\|\nu_1,\nu_2)$ の値
4	FO	{D / R}	1	出 力	度数 F の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=1: FI に分布関数 $P(F\|\nu_1,\nu_2)$ の値を与える ISW=2: FI に分布関数 $Q(F\|\nu_1,\nu_2)$ の値を与える
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) 0.0≤FI≤1.0

(b) N1≥1, N2≥1

(c) ISW∈{1, 2}

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	FI=0.0 であった.	FO に 0.0 または正の最大値を設定して処理を続ける.
1100	FI=1.0 であった.	FO に正の最大値または 0.0 を設定して処理を続ける.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3200	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 自由度 ν_1, ν_2 の χ^2 分布に従う確率変数をそれぞれ χ_1^2, χ_2^2 とし, χ_1^2 と χ_2^2 とが互いに独立であれば次式で定義される確率変数 F は自由度 ν_1, ν_2 の F 分布に従う.

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{\nu_1}}{\frac{\chi_2^2}{\nu_2}}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

ν_1=2, ν_2=2 について $P(F|\nu_1, \nu_2)$=0.2, $Q(F|\nu_1, \nu_2)$=0.2 となる F の値を求める.

(b) 入力データ

FI=0.2, N1=2, N2=2

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDIF
! *** EXAMPLE OF D1CDIF ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR,N1,N2,ISW
      REAL(8) FI,FO
!
      N1=2
      N2=2
      FI=0.2
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N1
      WRITE(6,2010) N2
      WRITE(6,2020) FI
      WRITE(6,3000)
      ISW=1
      CALL D1CDIF(N1,N2,FI,FO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) FO
!
      ISW=2
      CALL D1CDIF(N1,N2,FI,FO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) FO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDIF ***',/,&
             6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N1 = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N2 = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'FI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE F CORRESPONDING TO P(X,N)=FI:',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE F CORRESPONDING TO Q(X,N)=FI:',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDIF ***
 ** INPUT **
    N1 =   2
    N2 =   2
    FI =  0.2

 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE F CORRESPONDING TO P(X,N)=FI: 0.2500000047D+00
    IERR =    0
    VALUE F CORRESPONDING TO Q(X,N)=FI: 0.3999999925D+01
```

3.2.14 D1CDGM, R1CDGM
ガンマ分布

(1) **機 能**

母数が α, β であるガンマ分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & (x > 0; \alpha, \beta > 0) \\ 0 & (x \le 0; \alpha, \beta > 0) \end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x;\alpha,\beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt \quad (\alpha, \beta > 0)$$

(c) 分布関数

$$Q(x;\alpha,\beta) = 1 - P(x;\alpha,\beta) = \int_x^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt \quad (\alpha, \beta > 0)$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDGM (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDGM (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	入 力	形状母数 α の値
2	B	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	入 力	尺度母数 β の値
3	XI	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	$\left\{\begin{array}{c}D\\R\end{array}\right\}$	1	出 力	ガンマ分布の確率密度関数 $f(x;\alpha,\beta)$ または分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ または $Q(x;\alpha,\beta)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x;\alpha,\beta)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x;\alpha,\beta)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) A > 0.0

(c) B > 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI ≤ 0.0	XO に 0.0 または 1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) $P(x;\alpha,\beta)+Q(x;\alpha,\beta)=1$ の関係式より, $P(x;\alpha,\beta)$ または $Q(x;\alpha,\beta)$ の一方から他方を求めることは可能であるが, 桁落ちが発生し, 精度良く求められない場合がある.

(b) 母数が α, β のガンマ分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[x]=\frac{\alpha}{\beta}, \sigma^2[x]=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

で与えられる.

(c) $\alpha=1$ のガンマ分布は指数分布である. また, α の値を正の整数と制限した分布はアーラン分布と呼ばれる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\alpha=5.0$, $\beta=2.0$, $x=3.0$ として確率密度関数 $f(x;\alpha,\beta)$, 分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ および $Q(x;\alpha,\beta)$ の値を求める.

(b) 入力データ

A $= 5.0$, B $= 2.0$, XI $= 3.0$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDGM
! *** EXAMPLE OF D1CDGM ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) XI,XO
!
      A=5.0D0
      B=2.0D0
      XI=3.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) A
      WRITE(6,2010) B
      WRITE(6,2020) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDGM(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDGM(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDGM(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
```

```
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDGM ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'A  = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'B  = ',F4.1)
 2020 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDGM ***
      ** INPUT **
         A  =  5.0
         B  =  2.0
         XI =  3.0


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE OF P.D.F =  0.2677052351D+00
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F(1) =  0.7149434997D+00
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F(2) =  0.2850565003D+00
```

3.2.15 D1CDIG, R1CDIG 逆ガンマ分布

(1) **機 能**

母数が α, β であるガンマ分布の分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.) $P(x;\alpha,\beta)$ または $Q(x;\alpha,\beta)$ を与えて, そのときの確率変数の値 x を求める. $P(x;\alpha,\beta)$ と $Q(x;\alpha,\beta)$ は次式で定義される.

$$P(x;\alpha,\beta)=\int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt \quad (\alpha,\beta>0)$$

$$Q(x;\alpha,\beta)=1-P(x;\alpha,\beta)=\int_x^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt \quad (\alpha,\beta>0)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDIG (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDIG (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	{D R}	1	入 力	形状母数 α の値
2	B	{D R}	1	入 力	尺度母数 β の値
3	XI	{D R}	1	入 力	ガンマ分布の分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ または $Q(x;\alpha,\beta)$ の値
4	XO	{D R}	1	出 力	確率変数 x の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1:XI に分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ の値を入力する. ISW=2:XI に分布関数 $Q(x;\alpha,\beta)$ の値を入力する.
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{ISW}\in\{1,2\}$

(b) $\mathrm{A},\mathrm{B}>0.0$

(c) $0.0\le\mathrm{XI}\le1.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI = 0.0 または XI = 1.0	XI = 0.0 で ISW=1 のとき:XO に 0.0 を設定する. ISW=2 のとき:XO に最大値を設定する. XI = 1.0 で ISW=1 のとき:XO に最大値を設定する. ISW=2 のとき:XO に 0.0 を設定する.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3500	2 分割法において上限値が見つからなかった.	XO に最大値を設定する.
3600	所定の精度が得られる前に最大反復数に達した.	その時の値を返す.
4000	サブルーチン 3.2.14 $\left\{\begin{matrix}\text{D1CDGM}\\\text{R1CDGM}\end{matrix}\right\}$ でエラーが発生した.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 母数が α, β のガンマ分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[x] = \frac{\alpha}{\beta}, \sigma^2[x] = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

で与えられる.

(b) $\alpha = 1$ のガンマ分布は指数分布である. また, α の値を正の整数と制限した分布はアーラン分布と呼ばれる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\alpha = 5.0, \beta = 2.0$ について 分布関数 $P(x;\alpha,\beta) = 0.7, Q(x;\alpha,\beta) = 0.7$ となる x の値をそれぞれ求める.

(b) 入力データ

$\mathrm{A} = 5.0, \mathrm{B} = 2.0, \mathrm{XI} = 0.7$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDIG
! *** EXAMPLE OF D1CDIG ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) A,B,XI,XO
!
      A=5.0D0
      B=2.0D0
      XI=0.7D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) A,B
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=1
      CALL D1CDIG(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
```

```
      CALL D1CDIG(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDIG ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'A = ',F4.1,'  B = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,&
      'VALUE OF X CORRESPONDING TO P(X;ALPHA,BETA) = XI:',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,&
      'VALUE OF X CORRESPONDING TO Q(X;ALPHA,BETA) = XI:',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDIG ***
      ** INPUT **
         A =  5.0  B =  2.0
         XI =  0.7


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE OF X CORRESPONDING TO P(X;ALPHA,BETA) = XI: 0.2945180657D+01
         IERR =    0
         VALUE OF X CORRESPONDING TO Q(X;ALPHA,BETA) = XI: 0.1816804541D+01
```

3.2.16 D1CDBT, R1CDBT ベータ分布

(1) **機 能**

二つの正数 a, b を母数とするベータ分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & (0 < x < 1; a, b > 0) \\ 0 & (x \le 0, x \ge 1; a, b > 0) \end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x;a,b) = \begin{cases} 0 & (x \le 0; a, b > 0) \\ \dfrac{1}{B(a,b)} \displaystyle\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt & (0 < x < 1; a, b > 0) \\ 1 & (x \ge 1; a, b > 0) \end{cases}$$

(c) 分布関数

$$Q(x;a,b) = 1 - P(x;a,b) = \begin{cases} 1 & (x \le 0; a, b > 0) \\ \dfrac{1}{B(a,b)} \displaystyle\int_x^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt & (0 < x < 1; a, b > 0) \\ 0 & (x \ge 1; a, b > 0) \end{cases}$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDBT (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDBT (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D, R}	1	入 力	形状母数 a の値
2	B	{D, R}	1	入 力	形状母数 b の値
3	XI	{D, R}	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	{D, R}	1	出 力	ベータ分布の確率密度関数 $f(x;a,b)$ または分布関数 $P(x;a,b)$ または $Q(x;a,b)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x;a,b)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x;a,b)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x;a,b)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW $\in \{0,1,2\}$

(b) $\mathrm{A}, \mathrm{B} > 0.0$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	XI ≤ 0.0 または XI ≥ 1.0	XO に 0.0 または 1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3500	所定の精度が得られる前に最大反復回数に達した.	その時の値を返す.

(6) **注意事項**

(a) $P(x;a,b)+Q(x;a,b)=1$ の関係式より, $P(x;a,b)$ または $Q(x;a,b)$ の一方から他方を求めることは可能であるが, 桁落ちが発生し, 精度良く求められない場合がある.

(b) 母数が a, b のベータ分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[x]=\frac{a}{a+b},\quad \sigma^2[x]=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

で与えられる.

(c) $a=b=1$ のベータ分布は区間 (0, 1) の一様分布である.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$a=5.0$, $b=2.0$, $x=0.3$ として確率密度関数 $f(x;a,b)$, 分布関数 $P(x;a,b)$ および $Q(x;a,b)$ の値を求める.

(b) 入力データ

$\mathrm{A}=5.0, \mathrm{B}=2.0, \mathrm{XI}=0.3$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDBT
! *** EXAMPLE OF D1CDBT ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) A,B,XI,XO
!
      A=5.0D0
      B=2.0D0
      XI=0.3D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) A,B
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDBT(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDBT(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDBT(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDBT ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'A = ',F4.1,'  B = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDBT ***
      ** INPUT **
         A =  5.0  B =  2.0
         XI =  0.3


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE OF P.D.F =  0.1701000000D+00
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F(1) =  0.1093500000D-01
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F(2) =  0.9890650000D+00
```

3.2.17 D1CDIB, R1CDIB 逆ベータ分布

(1) **機 能**

二つの正数 a, b を母数とするベータ分布の分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.), $P(x; a, b)$ または $Q(x; a, b)$ を与えて, そのときの確率変数の値 x を求める. $P(x; a, b)$ と $Q(x; a, b)$ は次式で定義される.

$$P(x;a,b) = \begin{cases} 0 & (x \le 0; a, b > 0) \\ \dfrac{1}{B(a,b)} \displaystyle\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt & (0 < x < 1; a, b > 0) \\ 1 & (x \ge 1; a, b > 0) \end{cases}$$

$$Q(x;a,b) = 1 - P(x;a,b) = \begin{cases} 1 & (x \le 0; a, b > 0) \\ \dfrac{1}{B(a,b)} \displaystyle\int_x^\infty t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt & (0 < x < 1; a, b > 0) \\ 0 & (x \ge 1; a, b > 0) \end{cases}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDIB (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDIB (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	形状母数 a の値
2	B	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	形状母数 b の値
3	XI	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	ベータ分布の分布関数 $P(x; a, b)$ または $Q(x; a, b)$ の値
4	XO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	確率変数 x の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1:XI に分布関数 $P(x; a, b)$ の値を入力する ISW=2:XI に分布関数 $Q(x; a, b)$ の値を入力する
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{ISW} \in \{1, 2\}$

(b) $\mathrm{A}, \mathrm{B} > 0.0$

(c) $0.0 \leq \mathrm{XI} \leq 1.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	$\mathrm{XI} = 0.0$ または $\mathrm{XI} = 1.0$	XO に 0.0 または 1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3600	所定の精度が得られる前に最大反復回数に達した.	その時の値を返す.
4000	サブルーチン 3.2.16 $\left\{\begin{matrix}\mathrm{D1CDBT}\\\mathrm{R1CDBT}\end{matrix}\right\}$ でエラーが発生した.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 母数が a, b のベータ分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[x] = \frac{a}{a+b}, \quad \sigma^2[x] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

で与えられる.

(b) $a = b = 1$ のベータ分布は区間 (0, 1) の一様分布である.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$a = 5.0$, $b = 2.0$ について, 分布関数 $P(x; a, b) = 0.7$ および $Q(x; a, b) = 0.7$ となる x の値をそれぞれ求める.

(b) 入力データ

$\mathrm{A} = 5.0, \mathrm{B} = 2.0, \mathrm{XI} = 0.7$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDIB
! *** EXAMPLE OF D1CDIB ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) A,B,XI,XO
!
      A=5.0D0
      B=2.0D0
      XI=0.7D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) A,B
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=1
      CALL D1CDIB(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDIB(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDIB ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'A = ',F4.1,'  B = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,&
      'VALUE OF X CORRESPONDING TO P(X;A,B) = XI:',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,&
      'VALUE OF X CORRESPONDING TO Q(X;A,B) = XI:',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
    *** D1CDIB ***
     ** INPUT **
        A =  5.0  B =  2.0
        XI =  0.7


     ** OUTPUT **
        IERR =    0
        VALUE OF X CORRESPONDING TO P(X;A,B) = XI: 0.8181965287D+00
        IERR =    0
        VALUE OF X CORRESPONDING TO Q(X;A,B) = XI: 0.6396423096D+00
```

3.2.18 D1CDUF, R1CDUF 一様分布

(1) **機 能**

区間 (a,b) 内の一様分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & (a\le x\le b)\\ 0 & (x<a, x>b)\end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$F(x;a,b)=\begin{cases}0 & (x<a)\\ \dfrac{x-a}{b-a} & (a\le x\le b)\\ 1 & (x>b)\end{cases}$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDUF (XL, XU, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDUF (XL, XU, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	XL	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\ \text{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	確率変数 x の区間の下限 a
2	XU	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\ \text{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	確率変数 x の区間の上限 b
3	XI	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\ \text{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\ \text{R}\end{Bmatrix}$	1	出 力	一様分布の確率密度関数 $f(x;a,b)$ または分布関数 $F(x;a,b)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0: XO に確率密度関数 $f(x;a,b)$ の値を求める ISW=1: XO に分布関数 $F(x;a,b)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) XL≤XU

(b) ISW∈{0, 1}

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

a=0.0, b=1.0, x=0.5 として確率密度関数 $f(x; a, b)$, 分布関数 $F(x; a, b)$ の値を求める.

(b) 入力データ

XL=0.0, XU=1.0, XI=0.5

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDUF
! *** EXAMPLE OF D1CDUF ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER ISW,IERR
      REAL(8) XL,XU,XI,XO
!
      XL=0.0D0
      XU=1.0D0
      XI=0.5D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) XL,XU,XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=0
      CALL D1CDUF(XL,XU,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDUF(XL,XU,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDUF ***',/,&
             6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'XL = ',F4.1,/,&
             9X,'XU = ',F4.1,/,&
             9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F. =',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F. =',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDUF ***
      ** INPUT **
         XL =  0.0
         XU =  1.0
         XI =  0.5

      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE OF P.D.F. = 0.1000000000D+01
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F. = 0.5000000000D+00
```

3.2.19 D1CDTR, R1CDTR 三角分布

(1) **機 能**

三角分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;a,b,c)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & (a\le x\le b)\\ \dfrac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} & (b<x\le c)\\ 0 & (x<a, x>c)\end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$F(x;a,b,c)=\begin{cases}0 & (x<a)\\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & (a\le x\le b)\\ 1-\dfrac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)} & (b<x\le c)\\ 1 & (x>c)\end{cases}$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDTR (A, B, C, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDTR (A, B, C, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	三角分布の左端の x 座標 注意事項 (a) 参照
2	B	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	三角分布の頂点の x 座標 注意事項 (a) 参照
3	C	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	三角分布の右端の x 座標 注意事項 (a) 参照
4	XI	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の値
5	XO	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	三角分布の確率密度関数 $f(x;a,b,c)$ または分布関数 $F(x;a,b,c)$ の値
6	ISW	I	1	入 力	ISW=0: XO に確率密度関数 $f(x;a,b,c)$ の値を求める ISW=1: XO に分布関数 $F(x;a,b,c)$ の値を求める
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) A≤B≤C

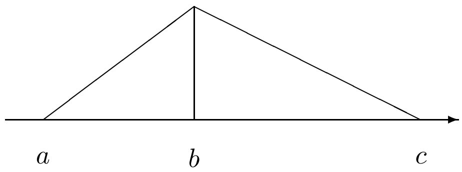
(b) ISW∈{0, 1}

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 三角形の座標



a:三角分布の左端の x 座標

b:三角分布の頂点の x 座標

c:三角分布の右端の x 座標

(7) **使用例**

(a) 問 題

a=0.0, b=1.0, c=2.0, x=0.5 として確率密度関数 $f(x; a, b, c)$, 分布関数 $F(x; a, b, c)$ の値を求める.

(b) 入力データ

A=0.0, B=1.0, C=2.0, XI=0.5

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDTR
! *** EXAMPLE OF D1CDTR ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER ISW,IERR
      REAL(8) A,B,C,XI,XO
!
      A=0.0D0
      B=1.0D0
      C=2.0D0
      XI=0.5D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) A,B,C,XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=0
      CALL D1CDTR(A,B,C,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDTR(A,B,C,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDTR ***',/,&
             6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'A  = ',F4.1,/,&
             9X,'B  = ',F4.1,/,&
             9X,'C  = ',F4.1,/,&
             9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F. =',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F. =',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDTR ***
 ** INPUT **
    A  =  0.0
    B  =  1.0
    C  =  2.0
    XI =  0.5

 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE OF P.D.F. = 0.5000000000D+00
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F. = 0.1250000000D+00
```

3.2.20 D1CDPA, R1CDPA パレート分布

(1) **機 能**

$a, b (a > 1, b > 0)$ を母数とするパレート分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x; a, b) = \begin{cases} (a-1)(\frac{x}{b})^{-a}\frac{1}{b} & (x > b; a > 1, b > 0) \\ 0 & (x \le b; a > 1, b > 0) \end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x; a, b) = \int_b^x f(t; a, b)\ dt = \begin{cases} 1 - (\frac{x}{b})^{1-a} & (x > b; a > 1, b > 0) \\ 0 & (x \le b; a > 1, b > 0) \end{cases}$$

(c) 分布関数

$$Q(x; a, b) = 1 - P(x; a, b) = \begin{cases} (\frac{x}{b})^{1-a} & (x > b; a > 1, b > 0) \\ 1 & (x \le b; a > 1, b > 0) \end{cases}$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDPA (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDPA (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	1	入 力	形状母数 a の値
2	B	{D/R}	1	入 力	尺度母数 b の値
3	XI	{D/R}	1	入 力	ISW=0:確率変数 x の値 ISW=1, 2:確率変数 x の積分範囲
4	XO	{D/R}	1	出 力	パレート分布の確率密度関数 $f(x;a,b)$ または分布関数 $P(x;a,b)$ または $Q(x;a,b)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x;a,b)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x;a,b)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x;a,b)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW $\in \{0,1,2\}$

(b) $\mathrm{A} > 1.0, \mathrm{B} > 0.0$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	XI $\leq$ B.	ISW $=0$ のとき XO $=0.0$ ISW $=1$ のとき XO $=0.0$ ISW $=2$ のとき XO $=1.0$ とする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) 注意事項

なし.

(7) 使用例

(a) 問 題

$a = 5.0, b = 2.0, x = 3.0$ として確率密度関数 $f(x; a, b)$, 分布関数 $P(x; a, b)$ および $Q(x; a, b)$ の値を求める.

(b) 入力データ

$\mathrm{A} = 5.0, \mathrm{B} = 2.0, \mathrm{X} = 3.0$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDPA
! *** EXAMPLE OF D1CDPA ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) A,B,XI,XO
!
      A=5.0D0
      B=2.0D0
      XI=3.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) A,B
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDPA(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDPA(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDPA(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDPA ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'A = ',F4.1,'  B = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
    *** D1CDPA ***
     ** INPUT **
        A =  5.0  B =  2.0
        XI =  3.0


     ** OUTPUT **
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F =  0.2633744856D+00
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F(1) =  0.8024691358D+00
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F(2) =  0.1975308642D+00
```

3.2.21 D1CDWE, R1CDWE ワイブル分布

(1) **機 能**

$a, b (a > 0, b > 0)$ を母数とするワイブル分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x; a, b) = \begin{cases} a\left(\dfrac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \dfrac{1}{b} & (0 < x; a, b > 0) \\ 0 & (x \le 0; a, b > 0) \end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x; a, b) = \int_0^x f(t; a, b)\ dt = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} & (0 < x; a, b > 0) \\ 0 & (x \le 0; a, b > 0) \end{cases}$$

(c) 分布関数

$$Q(x; a, b) = 1 - P(x; a, b) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} & (0 < x; a, b > 0) \\ 1 & (x \le 0; a, b > 0) \end{cases}$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDWE (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDWE (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D / R}	1	入 力	形状母数 a の値
2	B	{D / R}	1	入 力	尺度母数 b の値
3	XI	{D / R}	1	入 力	ISW=0:確率変数 x の値 ISW=1, 2:確率変数 x の積分範囲
4	XO	{D / R}	1	出 力	ワイブル分布の確率密度関数 $f(x;a,b)$ または分布関数 $P(x;a,b)$ または $Q(x;a,b)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x;a,b)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x;a,b)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x;a,b)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) $\mathrm{A} > 0.0, \mathrm{B} > 0.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	XI ≤ 0.0 であった.	ISW $= 0$ のとき XO $= 0.0$ ISW $= 1$ のとき XO $= 0.0$ ISW $= 2$ のとき XO $= 1.0$ とする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$a = 5.0, b = 2.0, x = 2.0$ として確率密度関数 $f(x; a, b)$, 分布関数 $P(x; a, b)$ および $Q(x; a, b)$ の値を求める.

(b) 入力データ

A = 5.0, B = 2.0, X = 2.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDWE
! *** EXAMPLE OF D1CDWE ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) A,B,XI,XO
!
      A=5.0D0
      B=2.0D0
      XI=2.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) A,B
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDWE(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDWE(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDWE(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDWE ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'A = ',F4.1,'  B = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDWE ***
      ** INPUT **
         A =  5.0  B =  2.0
         XI =  2.0


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE OF P.D.F =  0.9196986029D+00
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F(1) =  0.6321205588D+00
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F(2) =  0.3678794412D+00
```

3.2.22 D1CDEX, R1CDEX 指数分布

(1) **機 能**

母数が $\lambda(\lambda > 0)$ である指数分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0; \lambda > 0) \\ 0 & (x \le 0; \lambda > 0) \end{cases}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x;\lambda) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (\lambda > 0)$$

(c) 分布関数

$$Q(x;\lambda) = 1 - P(x;\lambda) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (\lambda > 0)$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDEX (B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDEX (B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型
I: $\begin{Bmatrix} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{Bmatrix}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	B	$\begin{Bmatrix} D \\ R \end{Bmatrix}$	1	入 力	尺度母数 λ の値
2	XI	$\begin{Bmatrix} D \\ R \end{Bmatrix}$	1	入 力	確率変数 x の値
3	XO	$\begin{Bmatrix} D \\ R \end{Bmatrix}$	1	出 力	ガンマ分布の確率密度関数 $f(x;\lambda)$ または分布関数 $P(x;\lambda)$ または $Q(x;\lambda)$ の値
4	ISW	I	1	入 力	ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x;\lambda)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x;\lambda)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x;\lambda)$ の値を求める
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) B > 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	XI $\le$ 0.0	XO に 0.0 または 1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 母数が λ の指数分布の平均と分散はそれぞれ

$$E[x] = \frac{1}{\lambda}, \sigma^2[x] = \frac{1}{\lambda^2}$$

で与えられる.

(b) 指数分布は $\alpha = 1$ のガンマ分布である.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\lambda = 2.0$, $x = 1.0$ として確率密度関数 $f(x; \lambda)$, 分布関数 $P(x; \lambda)$ および $Q(x; \lambda)$ の値を求める.

(b) 入力データ

B = 2.0, XI = 1.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDEX
! *** EXAMPLE OF B1CDEX ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER ISW,IERR
      REAL(8) XI,XO
      REAL(8) B
!
      B=2.0D0
      XI=1.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) B
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDEX(B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDEX(B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDEX(B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(/,5X,'*** D1CDEX ***',/,/,&
             6X,'** INPUT **',/)
 2000 FORMAT(8X,'B = ',F4.1,/)
 2010 FORMAT(8X,'XI = ',F4.1,/)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **',/)
 4000 FORMAT(8X,'IERR = ',I4,/)
 5000 FORMAT(8X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10,/)
 5010 FORMAT(8X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10,/)
 5020 FORMAT(8X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10,/)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1CDEX ***

      ** INPUT **

        B =  2.0

        XI =  1.0
```

```
** OUTPUT **
  IERR =    0
  VALUE OF P.D.F =  0.2706705665D+00
  IERR =    0
  VALUE OF C.D.F(1) =  0.8646647168D+00
  IERR =    0
  VALUE OF C.D.F(2) =  0.1353352832D+00
```

3.2.23 D1CDGU, R1CDGU
ガンベル分布

(1) **機 能**

a, b を母数とするガンベル分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b} e^{\frac{x-a}{b}} e^{-e^{\frac{x-a}{b}}}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x;a,b) = \int_{-\infty}^{x} f(t;a,b)dt$$

(c) 分布関数

$$Q(x;a,b) = 1 - P(x;a,b) = \int_{x}^{\infty} f(t;a,b)dt$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDGU (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDGU (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	位置母数 a の値
2	B	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	尺度母数 b の値
3	XI	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	出 力	ガンベル分布の確率密度関数 $f(x)$ または分布関数 $P(x)$ または $Q(x)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) B>0.0

(b) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

$a = 1.0$, $b = 2.0$, $x = 1.5$ として確率密度関数 $f(x; a, b)$, 分布関数 $P(x; a, b)$ および $Q(x; a, b)$ の値を求める.

(b) 入力データ

XL=1.0, XU=2.0, XI=1.5

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDGU
! *** EXAMPLE OF D1CDGU ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) A,B,XI,XO
!
      A=1.0D0
      B=2.0D0
      XI=1.5D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) A,B
      WRITE(6,2010) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDGU(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDGU(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDGU(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(1X,'*** D1CDGU ***',/,&
      /,1X,'** INPUT **',/)
 2000 FORMAT(1X,'A = ',F4.1,'  B = ',F4.1)
 2010 FORMAT(1X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(1X,/,1X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(1X,/,1X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(1X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(1X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(1X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDGU ***

** INPUT **

A =  1.0  B =  2.0
XI =  1.5

** OUTPUT **

IERR =    0
VALUE OF P.D.F =  0.1777863737D+00

IERR =    0
VALUE OF C.D.F(1) =  0.7230796659D+00

IERR =    0
VALUE OF C.D.F(2) =  0.2769203341D+00
```

3.2.24 D1CDLD, R1CDLD 対数分布

(1) **機 能**

区間 (a, b) 内の対数分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x; a, b) = \frac{\log x}{b(\log b - 1) - a(\log a - 1)}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x; a, b) = \int_a^x f(t; a, b)dt$$

(c) 分布関数

$$Q(x; a, b) = 1 - P(x; a, b) = \int_x^b f(t; a, b)dt$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDLD (XL, XU, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDLD (XL, XU, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	XL	$\left\{\begin{matrix}\text{D}\\\text{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の下限 a
2	XU	$\left\{\begin{matrix}\text{D}\\\text{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の上限 b
3	XI	$\left\{\begin{matrix}\text{D}\\\text{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	$\left\{\begin{matrix}\text{D}\\\text{R}\end{matrix}\right\}$	1	出 力	対数分布の確率密度関数 $f(x)$ または分布関数 $P(x)$ または $Q(x)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) 0.0<XL<XU

(b) XL<XI<XU

(c) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

$a = 1.0$, $b = 2.0$, $x = 1.5$ として確率密度関数 $f(x; a, b)$, 分布関数 $P(x; a, b)$ および $Q(x; a, b)$ の値を求める.

(b) 入力データ

XL=1.0, XU=2.0, XI=1.5

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDLD
! *** EXAMPLE OF D1CDLD ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER ISW,IERR
      REAL(8) XL,XU,XI,XO
!
      XL=1.0D0
      XU=2.0D0
      XI=1.5D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) XL,XU,XI
      WRITE(6,3000)
!
      ISW=0
      CALL D1CDLD(XL,XU,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDLD(XL,XU,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDLD(XL,XU,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(1X,'*** D1CDLD ***',/,&
             /,1X,'** INPUT **',/)
 2000 FORMAT(1X,'XL = ',F4.1,/,&
             1X,'XU = ',F4.1,/,&
             1X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(1X,/,1X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(1X,/,1X,'IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(1X,'VALUE OF P.D.F. =',D17.10)
 5020 FORMAT(1X,'VALUE OF C.D.F. =',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDLD ***
```

```
** INPUT **

XL =  1.0
XU =  2.0
XI =  1.5

** OUTPUT **

IERR =    0
VALUE OF P.D.F. = 0.1049627302D+01

IERR =    0
VALUE OF C.D.F. = 0.2800912285D+00

IERR =    0
VALUE OF C.D.F. = 0.7199087715D+00
```

3.2.25 D1CDLN, R1CDLN 対数正規分布

(1) **機 能**

平均が $e^{\mu}\sqrt{e^{\sigma^2}}$, 分散が $e^{2\mu}e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$ である対数正規分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0)$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x;\mu,\sigma) = \int_0^x \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \quad (\sigma > 0)$$

(c) 分布関数

$$Q(x;\mu,\sigma) = 1-P(x;\mu,\sigma) = \int_x^\infty \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \quad (\sigma > 0)$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDLN (XE, XV, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDLN (XE, XV, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{ \begin{array}{l} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{array} \right\}$

R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	XE	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	パラメータ μ の値
2	XV	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	パラメータ σ^2 の値
3	XI	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	対数正規分布の確率密度関数 $f(x;\mu,\sigma)$ または分布関数 $P(x;\mu,\sigma)$ または $Q(x)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0:XO に確率密度関数 $f(x;\mu,\sigma)$ の値を求める ISW=1:XO に分布関数 $P(x;\mu,\sigma)$ の値を求める ISW=2:XO に分布関数 $Q(x;\mu,\sigma)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) XV > 0.0

(c) X > 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) $P(x;\mu,\sigma) + Q(x;\mu,\sigma) = 1$ の関係式より, $P(x;\mu,\sigma)$ または $Q(x;\mu,\sigma)$ の一方から他方を求めることは可能であるが, 桁落ちが発生し, 精度良く求められない場合がある.

(b) 確率変数 x が平均 $e^{\mu}\sqrt{e^{\sigma^2}}$, 分散 $e^{2\mu}e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ の対数正規分布に従うとき, 確率変数 $\ln x$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\mu = 5.0$, $\sigma^2 = 2.5$, $x = 3.0$ として確率密度関数 $f(x;\mu,\sigma)$, 分布関数 $P(x;\mu,\sigma)$ および $Q(x;\mu,\sigma)$ の値を求める.

(b) 入力データ

XE $= 5.0$, XV $= 2.5$, XI $= 3.0$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDLN
! *** EXAMPLE OF D1CDLN ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW
      REAL(8) XE,XV,XI,XO
!
      XE=5.0D0
      XV=2.5D0
      XI=EXP(3.0D0)
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) XE
      WRITE(6,2010) XV
      WRITE(6,2020) XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDLN(XE,XV,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDLN(XE,XV,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDLN(XE,XV,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1CDLN ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'XE = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,'XV = ',F4.1)
 2020 FORMAT(9X,'XI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
```

```
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDLN ***
 ** INPUT **
    XE =  5.0
    XV =  2.5
    XI = 20.1


 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    VALUE OF P.D.F =  0.5644442201D-02
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(1) =  0.1029516054D+00
    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(2) =  0.8970483946D+00
```

3.2.26 D1CDLG, R1CDLG
ロジスティック分布

(1) **機 能**

平均が α, 分散が σ^2 であるロジスティック分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta\left\{1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right\}^2} \quad (\beta > 0)$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2\beta^2}{3}$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}} \quad (\beta > 0)$$

(c) 分布関数

$$Q(x;\alpha,\beta) = 1 - P(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{1+e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}} \quad (\beta > 0)$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDLG (XA, XB, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDLG (XA, XB, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	XA	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	平均 α の値
2	XB	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	パラメータ β の値
3	XI	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	ロジスティック分布の確率密度関数 $f(x;\alpha,\beta)$ または分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ または $Q(x;\alpha,\beta)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0 : XO に確率密度関数 $f(x;\alpha,\beta)$ の値を求める ISW=1 : XO に分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ の値を求める ISW=2 : XO に分布関数 $Q(x;\alpha,\beta)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) XB > 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) $P(x; \alpha, \beta) + Q(x; \alpha, \beta) = 1$ の関係式より, $P(x; \alpha, \beta)$ または $Q(x; \alpha, \beta)$ の一方から他方を求めることは可能であるが, 桁落ちが発生し, 精度良く求められない場合がある.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$, $x = 3.0$ として確率密度関数 $f(x; \alpha, \beta)$, 分布関数 $P(x; \alpha, \beta)$ および $Q(x; \alpha, \beta)$ の値を求める.

(b) 入力データ

XA $= 1.0$, XB $= 1.0$, XI $= 3.0$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDLG
! *** EXAMPLE OF D1CDLG ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER ISW,IERR
      REAL(8) XA,XB,XI,XO
!
      XA=1.0D0
      XB=1.0D0
      XI=3.0D0
      WRITE(6,6000)
      WRITE(6,6010) XA
      WRITE(6,6020) XB
      WRITE(6,6030) XI
      WRITE(6,6040)
!
      ISW=0
      CALL D1CDLG(XA,XB,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,6050) IERR
      WRITE(6,6060) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDLG(XA,XB,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,6050) IERR
      WRITE(6,6070) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDLG(XA,XB,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,6050) IERR
      WRITE(6,6080) XO
      STOP
!
 6000 FORMAT(/,&
      1X,'    *** D1CDLG ***',/,/,&
      1X,'     ** INPUT **',/)
 6010 FORMAT(1X,'        XA = ',F4.1)
 6020 FORMAT(1X,'        XB = ',F4.1)
 6030 FORMAT(1X,'        XI = ',F4.1)
 6040 FORMAT(/,&
      1X,'     ** OUTPUT **',/)
 6050 FORMAT(1X,'        IERR = ',I4)
 6060 FORMAT(1X,'        VALUE OF P.D.F    = ',D17.10,/)
 6070 FORMAT(1X,'        VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10,/)
 6080 FORMAT(1X,'        VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10,/)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDLG ***

 ** INPUT **

    XA =  1.0
    XB =  1.0
    XI =  3.0

 ** OUTPUT **

    IERR =    0
    VALUE OF P.D.F    =  0.1049935854D+00

    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(1) =  0.8807970780D+00

    IERR =    0
    VALUE OF C.D.F(2) =  0.1192029220D+00
```

3.2.27 D1CDCC, R1CDCC コーシー分布

(1) **機 能**

α, $\beta(\beta > 0)$ を母数とするコーシー分布について

(a) 確率密度関数 (probability density function; p.d.f.)

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\beta}{\beta^2+(x-\alpha)^2}\right] \quad (\beta > 0)$$

(b) 分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.)

$$P(x;\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{x} f(t;\alpha,\beta)\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{(x-\alpha)}{\beta} \quad (\beta > 0)$$

(c) 分布関数

$$Q(x;\alpha,\beta) = 1 - P(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{(x-\alpha)}{\beta} \quad (\beta > 0)$$

の値を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1CDCC (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1CDCC (A, B, XI, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	位置母数 α の値
2	B	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	尺度母数 β の値
3	XI	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	確率変数 x の値
4	XO	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	コーシー分布の確率密度関数 $f(x;\alpha,\beta)$ または分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ または $Q(x;\alpha,\beta)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	ISW=0 : XO に確率密度関数 $f(x;\alpha,\beta)$ の値を求める ISW=1 : XO に分布関数 $P(x;\alpha,\beta)$ の値を求める ISW=2 : XO に分布関数 $Q(x;\alpha,\beta)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0, 1, 2\}$

(b) B > 0.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

$\alpha = 2.0$, $\beta = 1.0$, $x = 3.0$ として確率密度関数 $f(x; \alpha, \beta)$, 分布関数 $P(x; \alpha, \beta)$ および $Q(x; \alpha, \beta)$ の値を求める.

(b) 入力データ

A = 2.0, B = 1.0, XI = 3.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1CDCC
! *** EXAMPLE OF B1CDCC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER ISW,IERR
      REAL(8) XI,XO
      REAL(8) A,B
!
      A=2.0D0
      B=1.0D0
      XI=3.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000)A
      WRITE(6,2010)B
      WRITE(6,2020)XI
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1CDCC(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1CDCC(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      ISW=2
      CALL D1CDCC(A,B,XI,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(/,5X,'*** D1CDCC ***',/,/,&
             6X,'** INPUT **',/)
 2000 FORMAT(8X,'A = ',F4.1,/)
 2010 FORMAT(8X,'B = ',F4.1,/)
 2020 FORMAT(8X,'XI = ',F4.1,/)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **',/)
 4000 FORMAT(8X,'IERR = ',I4,/)
 5000 FORMAT(8X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10,/)
 5010 FORMAT(8X,'VALUE OF C.D.F(1) = ',D17.10,/)
 5020 FORMAT(8X,'VALUE OF C.D.F(2) = ',D17.10,/)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D1CDCC ***
 ** INPUT **
   A =  2.0
   B =  1.0
   XI =  3.0
 ** OUTPUT **
   IERR =    0
   VALUE OF P.D.F =  0.1591549431D+00
   IERR =    0
   VALUE OF C.D.F(1) =  0.7500000000D+00
   IERR =    0
   VALUE OF C.D.F(2) =  0.2500000000D+00
```

3.3 離散分布

3.3.1 D1DDBP, R1DDBP
2 項分布

(1) **機 能**

(a) 2 項分布 (1)

事象がおこる確率 p と試行回数 n と出現回数 m を与えた時, 次式で定義される出現回数 m における 2 項分布の確率 $P_{BIN}(X=m;p,n)$ および分布関数 (cumulative distribution function; c.d.f.) $P_{BIN}(X \le m;p,n)$ の値を求める.

$$P_{BIN}(X=m;p,n) = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} p^m \cdot q^{n-m} \quad (q = 1-p)$$

$$P_{BIN}(X \le m;p,n) = \sum_{i=m}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i \cdot q^{n-i}$$

(b) 2 項分布 (2)

1 回の試行での成功確率 p と独立した事象の試行回数 n と失敗する回数の最大値 m を与えた時, 次式で定義される試行回数 n で少なくとも $(n-m)$ 回成功する確率 $Q_{BIN}(X=m;p,n)$ の値を求める.

$$\begin{aligned} Q_{BIN}(X=m;p,n) &= P_{BIN}(X \ge n-m;p,n) \\ &= 1 - \sum_{r=0}^{n-m-1} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} p^r \cdot q^{n-r} \quad (q = 1-p) \end{aligned}$$

(c) 負の 2 項分布

1 回の試行での成功確率 p と繰り返し試行における成功回数 n と失敗回数 m を与えた時, 次式で定義される失敗回数 m における負の 2 項分布の確率 $P_{NB}(X=m;p,n)$ および分布関数 $P_{NB}(X \le m;p,n)$ の値を求める.

$$P_{NB}(X=m;p,n) = \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m \end{pmatrix} p^n \cdot q^m \qquad (q = 1-p)$$

$$P_{NB}(X \le m;p,n) = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} p^n \cdot q^i$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1DDBP (N, M, PI, PO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1DDBP (N, M, PI, PO, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	N	I	1	入 力	変数 n
2	M	I	1	入 力	変数 m
3	PI	{D / R}	1	入 力	確率 p
4	PO	{D / R}	1	出 力	2 項分布の確率 $P_{BIN}(X=m;p,n)$ または 2 項分布の分布関数 $P_{BIN}(X\leq m;p,n)$ または負の 2 項分布の確率 $P_{NB}(X=m;p,n)$ または負の 2 項分布の分布関数 $P_{NB}(X\leq m;p,n)$ または確率 $Q_{BIN}(X=m;p,n)$ の値
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1:PO に 2 項分布の確率 $P_{BIN}(X=m;p,n)$ の値を求める ISW=2:PO に 2 項分布の分布関数 $P_{BIN}(X\leq m;p,n)$ の値を求める ISW=3:PO に負の 2 項分布の確率 $P_{NB}(X=m;p,n)$ の値を求める ISW=4:PO に負の 2 項分布の分布関数 $P_{NB}(X\leq m;p,n)$ の値を求める ISW=5:PO に確率 $Q_{BIN}(X=m;p,n)$ の値を求める
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) 0.0<PI<1.0

(b) N≥1

(c) 0≤M≤N (ISW∈{1, 2, 5} の時)
M≥0 (ISW∈{3, 4} の時)

(d) ISW∈{1, 2, 3, 4, 5}

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3200	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3300	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

- 事象が起こる確率 p=0.3, 試行回数 n=10, 出現回数 m=3 として 2 項分布の確率 $P_{BIN}(X = m; p, n)$ および分布関数 $P_{BIN}(X \leq m; p, n)$ の値を求める.
- 1 回の試行での成功確率 p=0.3, 繰り返し試行における成功回数 n=10, 失敗回数 m=3 として, 負の 2 項分布の確率 $P_{NB}(X = m; p, n)$ および分布関数 $P_{NB}(X \leq m; p, n)$ の値を求める.
- 1 回の試行で成功する確率 p=0.3, 独立した事象の試行回数 n=10, 失敗する回数の最大値 m=3 として確率 $Q_{BIN}(X = m; p, n)$ を求める.

(b) 入力データ

PI=0.3, N=10, M=3

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1DDBP
! *** EXAMPLE OF D1DDBP ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR,N,M,ISW
      REAL(8) PI,PO
!
      N=10
      M=3
      PI=0.3D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N
      WRITE(6,2010) M
      WRITE(6,2020) PI
      WRITE(6,3000)
      ISW=1
      CALL D1DDBP(N,M,PI,PO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) PO
!
      ISW=2
      CALL D1DDBP(N,M,PI,PO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) PO
!
      ISW=3
      CALL D1DDBP(N,M,PI,PO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5020) PO
!
      ISW=4
      CALL D1DDBP(N,M,PI,PO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5030) PO
!
      ISW=5
      CALL D1DDBP(N,M,PI,PO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5040) PO
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1DDBP ***',/,&
              6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N  = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'M  = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'PI = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F. OF BINOMIAL DISTRIBUTION= ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F. OF BINOMIAL DISTRIBUTION= ',D17.10)
 5020 FORMAT(9X,&
        'VALUE OF P.D.F. OF NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION= ',D17.10)
 5030 FORMAT(9X,&
        'VALUE OF C.D.F. OF NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION= ',D17.10)
 5040 FORMAT(9X,'VALUE OF BINOMIAL PROBABILITY= ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1DDBP ***
      ** INPUT **
         N  =  10
         M  =   3
         PI =  0.3


      ** OUTPUT **
```

```
IERR =    0
VALUE OF P.D.F. OF BINOMIAL DISTRIBUTION=  0.2668279320D+00
IERR =    0
VALUE OF C.D.F. OF BINOMIAL DISTRIBUTION=  0.6172172136D+00
IERR =    0
VALUE OF P.D.F. OF NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION=  0.4455837540D-03
IERR =    0
VALUE OF C.D.F. OF NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION=  0.6519600090D-03
IERR =    0
VALUE OF BINOMIAL PROBABILITY=  0.1059207840D-01
```

3.3.2 D1DDGO, R1DDGO
幾何分布

(1) **機 能**

ベルヌーイ試行において, 第 m 回目の試行で初めて成功する確率が p のとき, 次式で定義される幾何分布の確率 $P_{NB}(X=m;p)$ および分布関数 $P_{NB}(X \leq m;p)$ の値を求める.

$$P_{NB}(X=m;p) = q^{m-1}p \qquad (q=1-p)$$

$$P_{NB}(X \leq m;p) = \sum_{i=0}^{m} q^{m-1}p$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1DDGO (M, PI, PO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1DDGO (M, PI, PO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	M	I	1	入 力	変数 m
2	PI	{D/R}	1	入 力	確率 p
3	PO	{D/R}	1	出 力	幾何分布の確率 $P_{NB}(X=m;p)$ または幾何分布の分布関数 $P_{NB}(X \leq m;p)$
4	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1:PO に幾何分布の確率 $P_{BIN}(X=m;p)$ の値を求める ISW=2:PO に幾何分布の分布関数 $P_{BIN}(X \leq m;p)$ の値を求める
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) 0.0<PI<1.0

(b) M≥0

(c) ISW∈{1, 2}

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意味	処理内容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3200	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3300	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

ある事象 A の起こる確率が p=0.3 で, 試行 3 回目 (m=3) で事象 A が起きた時の幾何分布の確率 $P_{NB}(X = m; p)$ および分布関数 $P_{NB}(X \leq m; p)$ の値を求める.

(b) 入力データ

PI=0.3, M=3

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1DDGO
! *** MAIN - GEOMETRIC DISTRIBUTION ***
      REAL(8) PI,PO
      INTEGER          M,IERR,ISW
!
!CCCC INPUT DATA
!
      M  = 3
      PI = 0.3
!
!CCCC ISW = 1
!
      ISW = 1
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1100)
      WRITE(6,1200) 'M  ',M
      WRITE(6,1200) 'ISW',ISW
      WRITE(6,1300) 'PI ',PI
      CALL D1DDGO( M, PI, PO, ISW, IERR )
      WRITE(6,1700)
      WRITE(6,1200) 'IERR',IERR
      WRITE(6,1400) PO
!
!CCCC ISW = 2
!
      ISW = 2
      WRITE(6,1100)
      WRITE(6,1200) 'M  ',M
      WRITE(6,1200) 'ISW',ISW
      WRITE(6,1300) 'PI ',PI
      CALL D1DDGO( M, PI, PO, ISW, IERR )
      WRITE(6,1700)
      WRITE(6,1200) 'IERR',IERR
      WRITE(6,1500) PO
!
 1000 FORMAT( 1X, 2X, '*** D1DDGO ***',/)
 1100 FORMAT( 1X, 3X, '** INPUT **',/)
 1200 FORMAT( 6X, A, 2X, '=', 2X, I5)
 1300 FORMAT( 6X, A, 2X, '=', 2X, F5.2)
 1400 FORMAT( 6X,'VALUE OF P.D.F. OF GEOMETRIC DISTRIBUTION= ',D17.10,/)
 1500 FORMAT( 6X,'VALUE OF C.D.F. OF GEOMETRIC DISTRIBUTION= ',D17.10,/)
 1700 FORMAT( 1X, 3X, '** OUTPUT **',/)
!
      STOP
      END
```

(d) 出力結果

```
   *** D1DDGO ***

    ** INPUT **

      M    =      3
      ISW  =      1
      PI   =   0.30
    ** OUTPUT **

      IERR  =      0
      VALUE OF P.D.F. OF GEOMETRIC DISTRIBUTION=  0.1028999988D+00

    ** INPUT **

      M    =      3
      ISW  =      2
      PI   =   0.30
    ** OUTPUT **

      IERR  =      0
      VALUE OF C.D.F. OF GEOMETRIC DISTRIBUTION=  0.7599000164D+00
```

3.3.3 D1DDPO, R1DDPO ポアソン分布

(1) **機 能**

平均 λ と確率変数 k を与えた時, 次式で定義されるポアソン分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ または分布関数 $F(k)$ の値を求める.

$$Pr.\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k=0,1,2,\cdots;\lambda>0)$$

$$F(k)=\sum_{i=0}^{k}Pr.\{X=i\}=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^k}{k!}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1DDPO (XE, K, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1DDPO (XE, K, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	XE	{D / R}	1	入 力	平均 λ
2	K	I	1	入 力	確率変数の値 k
3	XO	{D / R}	1	出 力	ポアソン分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ または分布関数 $F(k)$ の値.
4	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1:XO にポアソン分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ の値を求める ISW=2:XO にポアソン分布の分布関数 $F(k)$ の値を求める
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW∈{1, 2}

(b) 0.0<XE

(c) 0≤K

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) または (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) K > 1000 のとき, Peizer-Pratt の近似式により, 分布関数 $F(k)$ の値を求める.

(7) **使用例**

(a) 問 題

平均 λ=3.0, 確率変数 k=2 としてポアソン分布の確率 $Pr.\{X = k\}$ の値 および 分布関数 $F(k)$ の値を求める.

(b) 入力データ

$\mathrm{XE} = 3.0, \mathrm{K} = 2$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1DDPO
! *** EXAMPLE OF D1DDPO ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER ISW,K
      REAL(8) XE
!
      XE=3.0D0
      K=2
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) XE
      WRITE(6,2010) K
      WRITE(6,3000)
      ISW=1
      CALL D1DDPO(XE,K,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=2
      CALL D1DDPO(XE,K,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1DDPO ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'XE = ',F4.1)
 2010 FORMAT(9X,' K = ',I4)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1DDPO ***
      ** INPUT **
         XE =  3.0
          K =    2


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         VALUE OF P.D.F =  0.2240418077D+00
         IERR =    0
         VALUE OF C.D.F =  0.4231900811D+00
```

3.3.4 D1DDHG, R1DDHG 超幾何分布

(1) **機 能**

大きさ N のロットがあり N 個中 M 個が不良品で $N-M$ 個が良品であるものとし，これから大きさ n の任意標本を抽出する場合に k 個の不良品が出現する確率分布に対応する超幾何分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ または分布関数 $F(k)$ の値を求める．超幾何分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ と分布関数 $F(k)$ は次式で定義される．

$$Pr.\{X=k\}=\begin{cases}\dfrac{\begin{pmatrix}M\\k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N-M\\n-k\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}N\\n\end{pmatrix}} & k=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

$$F(k)=\sum_{i=0}^{k}Pr.\{X=i\}=\frac{\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix}M\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N-M\\n-i\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}N\\n\end{pmatrix}}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1DDHG (NN, M, N, K, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1DDHG (NN, M, N, K, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	NN	I	1	入 力	母集団の大きさ N
2	M	I	1	入 力	母集団の不良品の数 M
3	N	I	1	入 力	標本の大きさ n
4	K	I	1	入 力	標本の不良品の数 k
5	XO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	超幾何分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ または分布関数 $F(k)$ の値
6	ISW	I	1	入 力	ISW=0:$Pr.\{X=k\}$ を求める ISW=1:$F(k)$ を求める
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{ISW} \in \{0, 1\}$

(b) $0 \leq \mathrm{M} \leq \mathrm{NN}$

(c) $1 \leq \mathrm{N} \leq \mathrm{NN}$

(d) $0 \leq \mathrm{K} \leq \min(\mathrm{M}, \mathrm{N})$

(e) $\mathrm{M} + \mathrm{N} - \mathrm{NN} \leq \mathrm{K}$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (d) を満足しなかった.	$\mathrm{ISW} = 0$ または $\mathrm{K} < 0$ のとき XO に 0.0 をセットする. $\mathrm{ISW} = 1$ かつ $\min(\mathrm{M}, \mathrm{N}) < \mathrm{K}$ のとき XO に 1.0 をセットする.
1010	制限条件 (e) を満足しなかった.	XO に 0.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 超幾何分布の期待値と分散はそれぞれ

$$E(X) = np, \quad \sigma^2(X) = \frac{N-k}{N-1}np(1-p) \qquad (p = \frac{M}{N})$$

で与えられる.

(b) 超幾何分布の確率 $Pr.\{X = k\}$ は

$$Pr.\{X = k\} = \frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \simeq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^k \qquad (p = \frac{M}{N}, \ \frac{n}{N} << 1)$$

を満たすので, 母集団が十分大きい場合には二項分布 $B(n, p)$ で近似できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

$N = 1000$, $M = 50$, $n = 20$, $k = 1$ として, 超幾何分布の確率 $Pr.\{X = k\}$ と分布関数 $F(k)$ の値を求める.

(b) 入力データ

$\mathrm{NN} = 1000$, $\mathrm{M} = 20$, $\mathrm{N} = 20$, $\mathrm{K} = 1$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1DDHG
! *** EXAMPLE OF D1DDHG ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER NN,M,N,K,ISW
      REAL(8) XO
!
      NN=1000
      M=50
      N=20
      K=1
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) NN
      WRITE(6,2010) M
      WRITE(6,2020) N
      WRITE(6,2030) K
      WRITE(6,3000)
      ISW=0
      CALL D1DDHG(NN,M,N,K,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XO
!
      ISW=1
      CALL D1DDHG(NN,M,N,K,XO,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5010) XO
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D1DDHG ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'NN = ',I5)
 2010 FORMAT(9X,'M  = ',I5)
 2020 FORMAT(9X,'N  = ',I5)
 2030 FORMAT(9X,'K  = ',I5)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'VALUE OF P.D.F. = ',D17.10)
 5010 FORMAT(9X,'VALUE OF C.D.F. = ',D17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
    *** D1DDHG ***
     ** INPUT **
        NN =  1000
        M  =    50
        N  =    20
        K  =     1


     ** OUTPUT **
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F. =  0.3811717030D+00
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F. =  0.7360425584D+00
```

3.3.5 D1DDHN, R1DDHN 負の超幾何分布

(1) **機 能**

大きさ NN のロットがあり, NN 個中 M 個が不良品で $NN-M$ 個が良品であるものとし, これからちょうど n 個の不良品が出現するまで任意標本を抽出する. この場合に抽出された標本の大きさが K となる確率 $Pr.\{X=k\}$ が従う確率分布を負の超幾何分布という. この確率分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ またはその分布関数 $F(k)$ の値を求める. 超幾何分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ と分布関数 $F(k)$ は次式で定義される.

$$Pr.\{X=k\} = \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} M \\ NN-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} NN-M \\ k-n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} NN \\ k-1 \end{pmatrix}} \times \dfrac{M-n+1}{NN-k+1} \\ = \dfrac{\begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} NN-k \\ M-n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} NN \\ M \end{pmatrix}} & k=n, n+1, n+2, \cdots, NN-M+n \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$F(k) = \sum_{i=n}^{k} Pr.\{X=i\} = \frac{\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} i-1 \\ n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} NN-i \\ M-n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} NN \\ M \end{pmatrix}}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D1DDHN (NN, M, N, K, XO, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R1DDHN (NN, M, N, K, XO, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内 容
1	NN	I	1	入 力	母集団の大きさ NN
2	M	I	1	入 力	母集団の不良品の数 M
3	N	I	1	入 力	抽出した不良品の数 n
4	K	I	1	入 力	抽出した標本の大きさ k
5	XO	{D / R}	1	出 力	負の超幾何分布の確率 $Pr.\{X=k\}$ または分布関数 $F(k)$ の値
6	ISW	I	1	入 力	ISW=0:$Pr.\{X=k\}$ を求める ISW=1:$F(k)$ を求める
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{0,1\}$

(b) $1 \leq$ N $\leq$ M $\leq$ NN

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	K $<$ N	XO に 0.0 をセットする.
1010	K $>$ NN $-$ M $+$ N	ISW=0 なら XO に 0.0 をセットする. ISW=1 なら XO に 1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) $M = 1$ ならば,

$$Pr.\{X = k\} = \begin{cases} \dfrac{1}{NN} & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots, NN$$

(b) $M > 1$ ならば, $N1$ を

$$\frac{NN \times (n-1)}{M-1} + 1$$

を超えない最大の整数とすると, 確率 $Pr.\{X = k\}$ について以下が成り立つ.

$$Pr.\{X = n\} \leq Pr.\{X = n+1\} \leq Pr.\{X = n+2\} \leq \cdots \leq Pr.\{X = N1\}$$

$$Pr.\{X = N1\} \geq Pr.\{X = N1+1\} \geq Pr.\{X = N1+2\} \geq \cdots \geq Pr.\{X = NN - M + n\}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

$N = 30$, $M = 25$, $n = 10$ として, $k = 10, 11, \cdots, 15$ について負の超幾何分布の確率 $Pr.\{X = k\}$ と分布関数 $F(k)$ の値を求める.

(b) 入力データ

NN $= 30$, M $= 25$, N $= 10$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B1DDHN
! *** EXAMPLE OF D1DDHN ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER NN,M,N,K,ISW
      INTEGER KINC,K1,K2,KMIN,KMAX
      REAL(8) XO
!
      NN=30
      M=25
      N=10
      KMIN=N
      KMAX=NN-M+N
      K1=KMIN
      K2=KMAX
      KINC=1
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) NN
      WRITE(6,2010) M
      WRITE(6,2020) N
      WRITE(6,3000)
!
```

```
        DO 100 K=K1,K2,KINC
          WRITE(6,2030) K
          ISW=0
          CALL D1DDHN(NN,M,N,K,XO,ISW,IERR)
          WRITE(6,4000) IERR
          WRITE(6,5000) XO
!
          ISW=1
          CALL D1DDHN(NN,M,N,K,XO,ISW,IERR)
          WRITE(6,4000) IERR
          WRITE(6,5010) XO
  100 CONTINUE
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(/,1X,'     *** D1DDHN ***',/,/,&
      1X,'     ** INPUT **')
 2000 FORMAT(1X,'        NN = ',I5)
 2010 FORMAT(1X,'        M  = ',I5)
 2020 FORMAT(1X,'        N  = ',I5)
 2030 FORMAT(/,1X,'        *** K  = ',I5,' ****')
 3000 FORMAT(/,/,1X,'     ** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(1X,'        IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(1X,'        VALUE OF P.D.F. = ',F17.10)
 5010 FORMAT(1X,'        VALUE OF C.D.F. = ',F17.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D1DDHN ***

     ** INPUT **
        NN =    30
        M  =    25
        N  =    10


     ** OUTPUT **

        *** K  =    10 ****
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F. =      0.1087954191
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F. =      0.1087954191

        *** K  =    11 ****
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F. =      0.2719885479
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F. =      0.3807839670

        *** K  =    12 ****
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F. =      0.3149341080
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F. =      0.6957180750

        *** K  =    13 ****
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F. =      0.2099560720
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F. =      0.9056741471

        *** K  =    14 ****
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F. =      0.0802773217
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F. =      0.9859514687

        *** K  =    15 ****
        IERR =    0
        VALUE OF P.D.F. =      0.0140485313
        IERR =    0
        VALUE OF C.D.F. =      1.0000000000
```

第 4 章　標本統計

4.1　概 要

本ライブラリでは, 標本統計の計算を行うための以下の機能を用意している.

- 1 標本基礎統計量
- 2 標本基礎統計量
- 幾何平均
- 積率 (モーメント)
- m 標本基礎統計量
- 調和平均
- 2 乗平均平方根
- 分散共分散行列
- 分散共分散行列 (群データ)
- 相関係数行列
- 重相関係数
- 偏相関係数

4.1.1 解説

(1) **1 標本基礎統計量**

n 個の観測データ $\{x_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対する総和, 平均, 標準偏差, 中央値は, それぞれ次式で定義される.

総和:

$$t = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

平均:

$$\bar{x} = \frac{t}{n}$$

標準偏差:

$$d = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n-1$, 標本分散を用いる場合は n となる.

m 個の等幅の階級 $C_{i+1} = [c_i, c_i + h)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ と 2 個の階級 $C_1 = (-\infty, c_1)$, $C_{m+2} = [c_m + h, \infty)$ が与えられて,

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{min} \\ c_{i+1} &= c_i + h \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ c_{max} &= c_m + h \end{aligned}$$

を満たすとする. ここで h は階級の幅であり,

$$h = \frac{c_{max} - c_{min}}{m}$$

このとき, 階級 C_i $(i = 1, 2, \cdots, m+2)$ の度数を e_i とすると, 度数の百分率 f_i:

$$f_i = \frac{e_i}{n} \times 100 \qquad i = 1, \cdots, m+2$$

中央値:

$$p = a_{i-1} + \frac{h \times (n/2 - s_{i-1})}{g_i}$$

ここで, a_{i-1} は中央値のある階級の下限であり, g_i は中央値のある階級の度数であり, s_{i-1} は中央値のある階級までの度数である.

(2) **2 標本基礎統計量**

n 個の 2 標本観測データ $\{x_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$, $\{y_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対する 総和, 平均, 標準偏差は, それぞれ次式で定義される.

総和:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

平均:

$$\bar{x} = \frac{S_x}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{S_y}{n}$$

標準偏差:

$$SD_x = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n-1$, 標本分散を用いる場合は n となる.

x_i に対する m_x 個の等幅の階級 ${C_{i+1}}^{(x)} = [c_i, c_i + h_x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m_x)$ と 2 個の階級 ${C_1}^{(x)} = (-\infty, c_1)$, ${C_{m+2}}^{(x)} = [c_m + h_x, \infty)$ y_i に対する m_y 個の等幅の階級 ${C_{i+1}}^{(y)} = [d_i, d_i + h_y)$ $(i = 1, 2, \cdots, m_y)$ と 2 個の階級 ${C_1}^{(y)} = (-\infty, d_1)$, ${C_{m+2}}^{(y)} = [d_m + h_y, \infty)$ が与えられて, x_i と y_i の直積として定義する $x-y$ 平面上での $(m_x + 2)\cdot(m_y + 2)$ 個の階級を $C_{i,j} = (C_i^{(x)}, C_j^{(y)})$ $(i = 1, 2, \cdots, m_x + 2; j = 1, 2, \cdots, m_y + 2)$ と定義するここで

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{min} \\ c_{i+1} &= c_i + h_x \qquad i = 1, 2, \cdots, m_x \\ c_{max} &= c_{m_x} + h_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= d_{min} \\ d_{i+1} &= d_i + h_y \qquad i = 1, 2, \cdots, m_y \\ d_{max} &= d_{m_y} + h_y \end{aligned}$$

を満たすとする. ここで h_x, h_y は階級の幅であり,

$$h_x = \frac{c_{max} - c_{min}}{m_x}$$

$$h_y = \frac{d_{may} - d_{min}}{m_y}$$

このとき, 階級 $C_{i,j}$ の度数を $e_{i,j}$ とすると, 度数の百分率 $\{f_{ij}\}$ は

$$f_{ij} = \frac{e_{ij}}{n} \times 100 \qquad i = 1, \cdots, m_y + 2, \quad j = 1, \cdots, m_x + 2$$

(3) **幾何平均**

n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i = 1, \cdots, n)$ が与えられたとき, 幾何平均とそれらの標準偏差は, それぞれ次式で定義される.

幾何平均:

$$\mathrm{GM} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

標準偏差:

$$\mathrm{GSD} \;=\; \exp\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\log x_i)^2 - n(\log \mathrm{GM})^2}{\alpha}}\right)$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n-1$, 標本分散を用いる場合は n となる.

(4) **積率 (モーメント)**

m 個の等幅の階級 $C_i = [x_i, x_i + h)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ が与えられて,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{min} \\ x_{i+1} &= x_i + h \quad\quad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_{max} &= x_m + h \end{aligned}$$

を満たすとする. ここで h は階級の幅であり,

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}$$

このとき, 階級 C_i の度数を f_i とすると, 原点まわりの 1 次モーメントと平均値のまわりの r 次モーメントとはそれぞれつぎのように定義される. 原点まわりの 1 次モーメント:

$$\mu'_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_i \hat{x}_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_i}$$

平均値のまわりの r 次モーメント:

$$\mu_r = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} [f_i(\hat{x}_i - \mu'_1)^r]}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_i} \quad\quad (r = 2, 3, \cdots)$$

なお, $\hat{x}_i$ は各階級の階級値を表し,

$$\hat{x}_i = x_{min} + (i - 0.5)h$$

である.

(5) m **標本基礎統計量**

n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ij}\}$, $(i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, m)$ が与えられたとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差) はつぎのように定義される.

総和:

$$t_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad\quad (j = 1, \cdots, m)$$

平均:

$$\bar{x}_j = \frac{t_j}{n}, \quad\quad (j = 1, \cdots, m)$$

偏差平方和:

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad\quad (j = 1, \cdots, m)$$

分散:

$$v_j = \frac{s_j}{\alpha}, \quad\quad (j = 1, \cdots, m)$$

標準偏差:

$$d_j = \sqrt{v_j}, \qquad (j = 1, \cdots, m)$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n-1$, 標本分散を用いる場合は n となる.

(6) **調和平均**

n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i = 1, \cdots, n)$ が与えられたとき, 調和平均を求める. または, n 個の観測値 $\{y_i\}(i = 1, \cdots, n)$ を追加した場合における調和平均を求める.
なお, n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i = 1, \cdots, n)$ に対する調和平均は, 次式で定義される.
調和平均:

$$\mathrm{HM} = \frac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

(7) **2 乗平均平方根**

n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i = 1, \cdots, n)$ が与えられたとき, 2 乗平均平方根を求める. または, n 個の観測値 $\{y_i\}(i = 1, \cdots, n)$ を追加した場合における 2 乗平均平方根を求める.
なお, n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i = 1, \cdots, n)$ に対する 2 乗平均平方根は, 次式で定義される.
2 乗平均平方根:

$$\mathrm{SM} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

(8) **分散共分散行列**

n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ki}\}(k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$ が与えられたとき, 標本間の分散, 共分散 $d_{i,j}$ は, 次式で定義される.

$$d_{ij} = \frac{s_{ij}}{\alpha} \qquad i, j = 1, \cdots, m$$

ここで, α は標本共分散を用いる場合は n, 不偏共分散を用いる場合は $n-1$ となる. ただし, s_{ij} は

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j), \qquad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, m$$

$\bar{x}_j$ は

$$\bar{x}_j = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{ij}}{n}, \qquad j = 1, \cdots, m$$

である.

(9) **分散共分散行列 (群データ)**

g 個の群があって各群ごとに n_r 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ij}^{(r)}\}(i = 1, \cdots, n_r; j = 1, \cdots, m; r = 1, \cdots, g)$ が与えられたとき, 全群を通しての分散, 共分散 $d_{i,j}$ は, 次式で定義される.

$$d_{ij} = \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{g}s_{ij}^{(r)}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{g}\alpha_r} \qquad i, j = 1, \cdots, m$$

ただし, 各群ごとの $s_{ij}^{(r)}$(偏差積和行列):

$$s_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n_r} (x_{ki}^{(r)} - \bar{x}_i^{(r)})(x_{kj}^{(r)} - \bar{x}_j^{(r)}) \qquad i, j = 1, \cdots, m$$

ここで, α_r は標本共分散を用いる場合は n_r, 不偏共分散を用いる場合は $n_r - 1$ となる. また, $\bar{x}_i^{(r)}$ は各群ごとの平均である.

(10) **相関係数行列**

n 個の観測値からなる m 個の標本 $\boldsymbol{x}_i = \{x_{ki}\}(k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$ が与えられたとき, 標本 $\boldsymbol{x}_i$ と標本 $\boldsymbol{x}_j$ の間の相関係数 r_{ij} は, 次式で定義される.

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii} \cdot s_{jj}}}, \qquad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, m$$

ただし, s_{ij} は

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j), \qquad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, m$$

$\bar{x}_j$ は

$$\bar{x}_j = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}{n}, \qquad j = 1, \cdots, m$$

である. また, 行列 $R = (r_{ij})$ を相関係数行列とよぶ. 相関係数は次の性質を有する.

- $|r_{ij}| \leq 1$
- $r_{ij} = r_{ji}$

(11) **重相関係数**と**偏相関係数**

m 個の変量 X_i $(i = 1, \cdots, m)$ について各変量の平均値を $\bar{x}_i$, 分散を ${\sigma_i}^2$, 変量 X_i と X_j との相関係数を r_{ij} とする. 重相関係数 $r_{p \cdot 1, \cdots, n}$ は $X_1, \cdots, X_l$ の 1 次式 $U = b + \sum_{i=1}^{l} c_i X_i$ と X_p $(l \geq p \geq m)$ との相関係数の最大値で定義され,

$$r_{p \cdot 1, \cdots, l} = \sqrt{1 - \frac{\Delta}{\Delta_{pp}}}$$

と計算できる. ここで, Δ と Δ_{ij} は, 相関係数 r_{ij} $(i, j = 1, \cdots, l, p)$ を要素とする行列の行列式と余因子行列である. この最大値に対応する U の値を $\hat{X}_p$ とおくと,

$$\hat{X}_p = \bar{x}_p - \sum_{i=1}^{l} \sigma_p \frac{\Delta_{ip}}{\Delta_{pp}} \frac{X_i - \bar{x}_i}{\sigma_i}$$

と表せる. $X_p - \hat{X}_p$ は X_p から $X_1, \cdots, X_l$ の影響を除いた変量と考えられ剰余という. 偏相関係数 $r_{p,q \cdot 1, \cdots, l}$ $(l \geq p, q \geq m)$ は $X_p - \hat{X}_p$ と $X_q - \hat{X}_q$ の相関係数で定義され,

$$r_{p,q \cdot 1, \cdots, l} = -\frac{\Delta_{pq}}{\sqrt{\Delta_{pp} \Delta_{qq}}}$$

と計算できる.

4.1.2 参考文献

(1) 武藤眞介, “統計解析ハンドブック”, 朝倉書店 (1995).

(2) 日本数学会編, “岩波 数学辞典 増訂版”, 岩波書店 (1960).

(3) 田中豊, 垂水共之, 脇本和昌 編, “パソコン統計解析ハンドブック I 基礎統計量編”, 共立出版株式会社 (1984).

4.2 基礎統計量

4.2.1 D2BA1T, R2BA1T
1 標本基礎統計量

(1) **機 能**

1 標本観測データの最小値, 最大値, 総和, 平均, 標準偏差, 中央値, 度数および度数の百分率を求める．または, 観測データ を追加した場合の最小値, 最大値, 総和, 平均, 標準偏差, 中央値, 度数および度数の百分率を求める．なお, n 個の観測データ $\{x_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対する総和, 平均, 標準偏差, 中央値は, それぞれ次式で定義される．

総和:

$$t = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

平均:

$$\bar{x} = \frac{t}{n}$$

標準偏差:

$$d = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n-1$, 標本分散を用いる場合は n となる．

また

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{min} \\ c_{i+1} &= c_i + h \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ c_{max} &= c_m + h \end{aligned}$$

満たすとして m 個の等幅の階級 $C_{i+1} = [c_i, c_i + h)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ と 2 個の階級 $C_1 = (-\infty, c_1)$, $C_{m+2} = [c_m + h, \infty)$ を考え各階級の度数を e_i と次式で定義される, 度数の百分率 f_i を求める．

$$f_i = \frac{e_i}{n} \times 100 \qquad i = 1, \cdots, m+2$$

なお h は階級の幅であり,

$$h = \frac{c_{max} - c_{min}}{m}$$

中央値:

$$p = a_{i-1} + \frac{h \times (n/2 - s_{i-1})}{g_i}$$

ここで, a_{i-1} は中央値のある階級の下限であり, g_i は中央値のある階級の度数であり, s_{i-1} は中央値のある階級までの度数である．

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2BA1T (A, N, NC, BL, BU, NS, STAT, IFRQ1, FREQ2, ISW, IWK,WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2BA1T (A, N, NC, BL, BU, NS, STAT, IFRQ1, FREQ2, ISW, IWK,WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	N	入 力	観測値列 $\{x_i\}$
2	N	I	1	入 力	観測値の数 n
3	NC	I	1	入 力	階級の数 $m+2$
4	BL	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	c_{min} の値
5	BU	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	c_{max} の値
6	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の観測値の数 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	観測値の数 n
7	STAT	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	6	出 力	観測値の基礎統計量 (注意事項 (b) 参照)
8	IFRQ1	I	NC	出 力	各級ごとの度数 $\{e_i\}$
9	FREQ2	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	NC	出 力	各級ごとの度数の百分率 $\{f_i\}$
10	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏推定値を利用して計算 (既知統計量なし) 1: 不偏推定値を利用して計算 (観測値追加) 2: 標本分散を利用して計算 (既知統計量なし) 3: 標本分散を利用して計算 (観測値追加)
11	IWK	I	NC	ワーク	作業領域
12	WK	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	NC + N	ワーク	作業領域
13	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW $=$ 0, 1, 2, 3

(b) N $\geq$ 1

(c) NC $\geq$ 3

(d) BU $>$ BL

(e) NS $\geq$ 1 (ISW=1 または 3 のとき)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	ISW=0, N=1 のときに標準偏差を求めようとした.	標準偏差に表現できる絶対値最大値を設定する.
1020	BU<BL であった.	BU と BL を入れ換えて処理を続ける.
3000	制限条件 (b), (c) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	BU=BL であった.	
3020	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値 $<$ BL のとき度数は IFRQ1 (1) に入る.
観測値 $\geq$ BU のとき度数は IFRQ1(NC) に入る.

(b) 基礎統計量は配列 STAT に次のように格納される.
STAT (1) : 観測値の最小値
STAT (2) : 観測値の最大値
STAT (3) : 観測値の総和 t
STAT (4) : 観測値の平均 $\bar{x}$
STAT (5) : 観測値の標準偏差 d
STAT (6) : 観測値の中央値 p

(c) 観測値を追加した場合の基礎統計量を求めたい場合には, 観測値を追加するまえに計算した NC, BL, BU, NS, STAT, IFRQ1, FREQ2, WK の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 または 3, に設定して計算を行えば良い. ただし, 標準偏差を求める場合には, 前回標本分散を利用して計算した場合は引き続き標本分散を利用して計算する様に, 不偏推定値を計算した場合は引き続き不偏推定値を計算する様に, ISW の値を設定する必要がある.

(d) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(e) 不偏推定値を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本分散を利用して計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題
1 標本観測データ

$$\{x_i\} = \{-10, -9, -8, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$$

の最小値, 最大値, 総和, 平均, 標準偏差, 中央値, 度数および度数の百分率を求める. さらに 1 標本観測データ

$$\{y_i\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

が追加されたときの最小値, 最大値, 総和, 平均, 標準偏差, 中央値, 度数および度数の百分率を求める.

(b) 入力データ

1 回目の処理:

1 標本観測データ $\{x_i\}$, N=11, NC=7, BL=−6.5, BU=5.8, ISW=0

2 回目の処理:

1 標本観測データ $\{y_i\}$, N=10, NC=7, BL=−6.5, BU=5.8, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2BA1T
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, NC = 7 )
      DIMENSION IFRQ1(NC),IWK(NC)
      DIMENSION A(NA),STAT(6),FREQ2(NC),WK(NA+NC)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =    0
      ISW  =    0
      READ(5,*) N
      READ(5,*) BL
      READ(5,*) BU
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,NC,BL,BU
      WRITE(6,6020) (A(I),I=1,N)
      CALL D2BA1T(A,N,NC,BL,BU,NS,STAT,IFRQ1,FREQ2,ISW,IWK,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS,(STAT(I),I=1,6)
      WRITE(6,6050)
      DO 110 I=1,NC
         WRITE(6,6060) I,IFRQ1(I),FREQ2(I)
  110 CONTINUE
!
      WRITE(6,6070)
      IERR =  0
      ISW  =  1
      READ(5,*) N
      DO 120 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,NC,BL,BU
      WRITE(6,6020) (A(I),I=1,N)
      CALL D2BA1T(A,N,NC,BL,BU,NS,STAT,IFRQ1,FREQ2,ISW,IWK,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS,(STAT(I),I=1,6)
      WRITE(6,6050)
      DO 130 I=1,NC
         WRITE(6,6060) I,IFRQ1(I),FREQ2(I)
  130 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2BA1T ***',/,&
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'N = ',I6,5X,'NC = ',I6,/,&
              /,7X,'BL = ',F11.2,5X,'BU = ',F11.2)
 6020 FORMAT( /,7X,'OBSERVATIONS',/,/,&
                  5(6X,5(2X,F11.2),/))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE  =       ',I6,/,&
              /,7X,'VMIN               = ',F11.2,/,&
              /,7X,'VMAX               = ',F11.2,/,&
              /,7X,'SUM                = ',F11.2,/,&
              /,7X,'VMEAN              = ',D15.8,/,&
              /,7X,'STANDARD DEVIATION = ',D15.8,/,&
              /,7X,'VMEDIAN            = ',D15.8)
 6050 FORMAT( /,7X,'VALUE OF EACH CLASSES',/,&
              /,10X,'CLASS',5X,'MEMBER NUMBER',5X,'PERCENTAGE',/,&
               7X,42('-'))
 6060 FORMAT(  7X,I6,8X,I6,8X,F11.2)
 6070 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D2BA1T ***

   *** FIRST PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      0

       N =     11     NC =      7

       BL =       -6.50     BU =        5.80

       OBSERVATIONS

             -10.00         -9.00         -8.00         -6.00         -5.00
              -4.00         -3.00         -2.00         -1.00          0.00
```

```
        1.00

** OUTPUT **

    IERR =      0

    TOTAL SAMPLE SIZE  =          11

    VMIN               =      -10.00

    VMAX               =        1.00

    SUM                =      -47.00

    VMEAN              = -0.42727273D+01

    STANDARD DEVIATION =  0.36902821D+01

    VMEDIAN            = -0.36300000D+01

    VALUE OF EACH CLASSES

       CLASS     MEMBER NUMBER     PERCENTAGE
    ------------------------------------------
         1             3              27.27
         2             2              18.18
         3             3              27.27
         4             2              18.18
         5             1               9.09
         6             0               0.00
         7             0               0.00

*** CONTINUATION PROCESSING ***

** INPUT **

    ISW =      1

    N =     10     NC =      7

    BL =       -6.50     BU =        5.80

    OBSERVATIONS

            2.00         3.00         4.00         5.00         6.00
            7.00         8.00         9.00        10.00        11.00

** OUTPUT **

    IERR =      0

    TOTAL SAMPLE SIZE  =          21

    VMIN               =      -10.00

    VMAX               =       11.00

    SUM                =       18.00

    VMEAN              =  0.85714286D+00

    STANDARD DEVIATION =  0.64287302D+01

    VMEDIAN            =  0.12900000D+01

    VALUE OF EACH CLASSES

       CLASS     MEMBER NUMBER     PERCENTAGE
    ------------------------------------------
         1             3              14.29
         2             2               9.52
         3             3              14.29
         4             2               9.52
         5             3              14.29
         6             2               9.52
         7             6              28.57
```

4.2.2 D2BA2S, R2BA2S 2 標本基礎統計量

(1) **機 能**

2 標本観測データの最小値, 最大値, 総和, 平均, 標準偏差, 度数および度数の百分率を求める. または, 2 標本観測データを追加した場合の最小値, 最大値, 総和, 平均, 標準偏差, 度数および度数の百分率を求める.
なお, n 個の 2 標本観測データ $\{x_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$, $\{y_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対する 総和, 平均, 標準偏差は, それぞれ次式で定義される.
総和:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

平均:

$$\bar{x} = \frac{S_x}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{S_y}{n}$$

標準偏差:

$$SD_x = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$SD_y = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n-1$, 標本分散を用いる場合は n となる.
また

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{min} \\ c_{i+1} &= c_i + h_x \qquad i = 1, 2, \cdots, m_x \\ c_{max} &= c_{m_x} + h_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= d_{min} \\ d_{i+1} &= d_i + h_y \qquad i = 1, 2, \cdots, m_y \\ d_{max} &= d_{m_y} + h_y \end{aligned}$$

を満たすとして x_i に対する m_x 個の等幅の階級 ${C_{i+1}}^{(x)} = [c_i, c_i + h_x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m_x)$ と 2 個の階級 ${C_1}^{(x)} = (-\infty, c_1)$, ${C_{m+2}}^{(x)} = [c_m + h_x, \infty)$ y_i に対する m_y 個の等幅の階級 ${C_{i+1}}^{(y)} = [d_i, d_i + h_y)$ $(i = 1, 2, \cdots, m_y)$ と 2 個の階級 ${C_1}^{(y)} = (-\infty, d_1)$, ${C_{m+2}}^{(y)} = [d_m + h_y, \infty)$ を考え x_i と y_i の直積として定義する $x - y$ 平面上での $(m_x + 2)\cdot(m_y + 2)$ 個の階級を $C_{i,j} = (C_i^{(x)}, C_j^{(y)})$ $(i = 1, 2, \cdots, m_x + 2; j = 1, 2, \cdots, m_y + 2)$ と定義する. 各階級の度数 $\{e_{ij}\}$ と次式で定義される度数の百分率 $\{f_{ij}\}$ を求める.

$$f_{ij} = \frac{e_{ij}}{n} \times 100 \qquad i = 1, \cdots, m_x + 2, \quad j = 1, \cdots, m_y + 2$$

なお h_x, h_y は階級の幅であり,

$$h_x = \frac{c_{max} - c_{min}}{m_x}$$

$$h_y = \frac{d_{may} - d_{min}}{m_y}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2BA2S (X, N, Y, NCX, NCY, BLX, BUX, BLY, BUY, NS, STAT, IFRQ1, FREQ2, ISW, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2BA2S (X, N, Y, NCX, NCY, BLX, BUX, BLY, BUY, NS, STAT, IFRQ1, FREQ2, ISW, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	X	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	N	入 力	標本 X の観測値列 $\{x_i\}$
2	N	I	1	入 力	観測値対の数 n
3	Y	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	N	入 力	標本 Y の観測値列 $\{y_i\}$
4	NCX	I	1	入 力	標本 X の級数 m_x+2
5	NCY	I	1	入 力	標本 Y の級数 m_y+2
6	BLX	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	c_{min} の値
7	BUX	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	c_{max} の値
8	BLY	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	d_{min} の値
9	BUY	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	d_{max} の値
10	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の観測値対の数 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	観測値対の数 n
11	STAT	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	5,2	出 力	観測値の基礎統計量 (注意事項 (b) 参照)
12	IFRQ1	I	NCY, NCX	出 力	度数分布表 $\{e_{ij}\}$
13	FREQ2	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	NCY, NCX	出 力	百分率の度数分布表 $\{f_{ij}\}$
14	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏推定値を利用して計算 (既知統計量なし) 1: 不偏推定値を利用して計算 (観測値追加) 2: 標本分散を利用して計算 (既知統計量なし) 3: 標本分散を利用して計算 (観測値追加)
15	WK	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** $(\mathrm{NCX}+\mathrm{NCY}+2\times\mathrm{N})$
16	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW = 0, 1, 2, 3

(b) N $\geq$ 1

(c) NCX $\geq$ 3

(d) NCY $\geq$ 3

(e) BUX $>$ BLX

(f) BUY $>$ BLY

(g) NS $\geq$ 1 (ISW=1 または 3 のとき)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	ISW=0, N=1 のときに標準偏差を求めようとした.	標準偏差に表現できる絶対値最大値を設定する.
1020	BUX<BLX であった.	BUX と BLX を入れ換えて処理を続ける.
1030	BUY<BLY であった.	BUY と BLY を入れ換えて処理を続ける.
3000	制限条件 (b), (c), (d) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	BUX = BLX または, BUY = BLY であった.	
3020	制限条件 (g) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値の度数 $\{e_{ij}\}$ と百分率の度数分布 $\{f_{ij}\}$ はそれぞれ実行列 (2 次元配列型) として配列 IFRQ1, IFRQ2 に格納される. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(b) 基礎統計量は配列 STAT に次のように格納される.

STAT (1, 1) : 標本 X の最小値　　STAT (1, 2) : 標本 Y の最小値
STAT (2, 1) : 標本 X の最大値　　STAT (2, 2) : 標本 Y の最大値
STAT (3, 1) : 標本 X の総和 S_x　　STAT (3, 2) : 標本 Y の総和 S_y
STAT (4, 1) : 標本 X の平均 $\bar{x}$　　STAT (4, 2) : 標本 Y の平均 $\bar{y}$
STAT (5, 1) : 標本 X の標準偏差 SD_x　　STAT (5, 2) : 標本 Y の標準偏差 SD_y

(c) 観測値を追加した場合の基礎統計量および度数, 度数の百分率を求めたい場合には, 観測値を追加するまえに計算した NCX, NCY, BLX, BUX, BLY, BUY, NS, STAT, IFRQ1, FREQ2, WK の内容をそのまま利用して, X, Y に追加になった対の観測値を, N に追加になった観測値対の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 または 3, に設定して計算を行えば良い. ただし, 標準偏差を求める場合には, 前回標本分散を利用して計算した場合は引き続き標本分散を利用して計算する様に, 不偏推定値を計算した場合は引き続き不偏推定値を計算する様に, ISW の値を設定する必要がある.

(d) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(e) 不偏推定値を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本分散を利用して計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

2 標本観測データ

$$\{x_i\} = \{1,3,5,7,9,11,13\}$$
$$\{y_i\} = \{2,4,6,8,10,12,14\}$$

の最小値, 最大値, 総和, 平均, 標準偏差, 度数および度数の百分率を求める. さらに 2 標本観測データ

$$\{x'_i\} = \{15,17,19,21\}$$
$$\{y'_i\} = \{16,18,20,22\}$$

が追加されたときの最小値, 最大値, 総和, 平均, 標準偏差, 度数および度数の百分率を求める.

(b) 入力データ

1 回目の処理:

2 標本観測データ $\{x_i\},\{y_i\}$,

N=7, NCX=8, NCY=7, BLX=5.5, BLY=2.5, BUX=11.5, BUY=17.5, ISW=0

2 回目の処理:

2 標本観測データ $\{x'_i\},\{y'_i\}$,

N=4, NCX=8, NCY=7, BLX=5.5, BLY=2.5, BUX=11.5, BUY=17.5, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2BA2S
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, NCX = 8, NCY = 7 )
      DIMENSION IFRQ1(NCY,NCX)
      DIMENSION X(NA),Y(NA),STAT(5,2),FREQ2(NCY,NCX),WK(NCX+NCY+2*NA)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =     0
      ISW  =     0
      READ(5,*) N
      READ(5,*) BLX
      READ(5,*) BUX
      READ(5,*) BLY
      READ(5,*) BUY
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) X(I),Y(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,NCX,NCY,BLX,BLY,BUX,BUY
      WRITE(6,6020) 'X',(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,6020) 'Y',(Y(I),I=1,N)
      CALL D2BA2S(X,N,Y,NCX,NCY,BLX,BUX,BLY,BUY,NS,&
      STAT,IFRQ1,FREQ2,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      WRITE(6,6050) 'X',(STAT(I,1),I=1,5)
      WRITE(6,6050) 'Y',(STAT(I,2),I=1,5)
      WRITE(6,6060)
      DO 110 I=1,NCY
         WRITE(6,6070) (IFRQ1(I,J),J=1,NCX)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6080)
      DO 120 I=1,NCY
         WRITE(6,6090) (FREQ2(I,J),J=1,NCX)
  120 CONTINUE
!
      WRITE(6,6100)
      IERR =     0
      ISW  =     1
      READ(5,*) N
      DO 130 I=1,N
         READ(5,*) X(I),Y(I)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,NCX,NCY,BLX,BLY,BUX,BUY
      WRITE(6,6020) 'X',(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,6020) 'Y',(Y(I),I=1,N)
      CALL D2BA2S(X,N,Y,NCX,NCY,BLX,BUX,BLY,BUY,NS,&
      STAT,IFRQ1,FREQ2,ISW,WK,IERR)
```

```
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      WRITE(6,6050) 'X',(STAT(I,1),I=1,5)
      WRITE(6,6050) 'Y',(STAT(I,2),I=1,5)
      WRITE(6,6060)
      DO 140 I=1,NCY
         WRITE(6,6070) (IFRQ1(I,J),J=1,NCX)
  140 CONTINUE
      WRITE(6,6080)
      DO 150 I=1,NCY
         WRITE(6,6090) (FREQ2(I,J),J=1,NCX)
  150 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2BA2S ***',/,&
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'N = ',I6,/,&
              /,7X,'NCX = ',5X,I6,5X,'NCY = ',5X,I6,/,&
              /,7X,'BLX = ',F11.2,5X,'BLY = ',F11.2,/,&
              /,7X,'BUX = ',F11.2,5X,'BUY = ',F11.2)
 6020 FORMAT( /,7X,'OBSERVATIONS ',A,/,/,&
                   5(6X,5(2X,F11.2),/))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',I6,/,&
              /,66X,'STANDARD',/,&
               8X,'OBSERVATION',3X,'VMIN',8X,'VMAX',8X,'SUM',8X,&
                   'VMEAN',4X,'DEVIATION',/,&
               7X,69('-'))
 6050 FORMAT(  13X,A,4(1X,F11.2),2X,D11.4)
 6060 FORMAT( /,7X,'MATRIX OF FREQUENCIES',/)
 6070 FORMAT(  9X,10I6)
 6080 FORMAT( /,7X,'MATRIX OF PERCENT FREQUENCIES',/)
 6090 FORMAT(  9X,10F6.2)
 6100 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D2BA2S ***

   *** FIRST PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      0

       N =      7

       NCX =           8     NCY =           7

       BLX =        5.50     BLY =        2.50

       BUX =       11.50     BUY =       17.50

       OBSERVATIONS X

               1.00         3.00         5.00         7.00         9.00
              11.00        13.00

       OBSERVATIONS Y

               2.00         4.00         6.00         8.00        10.00
              12.00        14.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =      7

                                                                  STANDARD
        OBSERVATION   VMIN        VMAX        SUM        VMEAN    DEVIATION
       ---------------------------------------------------------------------
             X         1.00       13.00       49.00       7.00   0.4320D+01
             Y         2.00       14.00       56.00       8.00   0.4320D+01

       MATRIX OF FREQUENCIES

              1     0     0     0     0     0     0     0
              1     0     0     0     0     0     0     0
              1     0     1     0     0     0     0     0
              0     0     0     0     1     0     0     0
              0     0     0     0     0     0     1     1
              0     0     0     0     0     0     0     0
              0     0     0     0     0     0     0     0

       MATRIX OF PERCENT FREQUENCIES

          14.29  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
          14.29  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
          14.29  0.00 14.29  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
           0.00  0.00  0.00  0.00 14.29  0.00  0.00  0.00
           0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00 14.29 14.29
           0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
           0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
```

```
*** CONTINUATION PROCESSING ***

** INPUT **

    ISW =      1

    N =      4

    NCX =          8     NCY =          7

    BLX =       5.50     BLY =       2.50

    BUX =      11.50     BUY =      17.50

    OBSERVATIONS X

           15.00        17.00        19.00        21.00

    OBSERVATIONS Y

           16.00        18.00        20.00        22.00

** OUTPUT **

    IERR =      0

    TOTAL SAMPLE SIZE =     11

                                                                  STANDARD
     OBSERVATION   VMIN        VMAX        SUM        VMEAN    DEVIATION
    ---------------------------------------------------------------------
          X        1.00       21.00      121.00       11.00   0.6633D+01
          Y        2.00       22.00      132.00       12.00   0.6633D+01

    MATRIX OF FREQUENCIES

           1     0     0     0     0     0     0     0
           1     0     0     0     0     0     0     0
           1     0     1     0     0     0     0     0
           0     0     0     0     1     0     0     0
           0     0     0     0     0     0     1     1
           0     0     0     0     0     0     0     1
           0     0     0     0     0     0     0     3

    MATRIX OF PERCENT FREQUENCIES

        9.09  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
        9.09  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
        9.09  0.00  9.09  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
        0.00  0.00  0.00  0.00  9.09  0.00  0.00  0.00
        0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  9.09  9.09
        0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  9.09
        0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00 27.27
```

4.2.3 D2BAMS, R2BAMS m 標本基礎統計量

(1) **機 能**

n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ij}\}$, $(i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, m)$ が与えられたとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差) を求める. または, 基礎統計量が分かっている m 個の標本のそれぞれに n 個の観測値 $\{y_{ij}\}$, $(i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, m)$ を追加した場合の基礎統計量を求める.

なお, n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ij}\}$, $(i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, m)$ に対する基礎統計量は, それぞれ次式で定義される.

総和:

$$t_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad (j = 1, \cdots, m)$$

平均:

$$\bar{x}_j = \frac{t_j}{n}, \quad (j = 1, \cdots, m)$$

偏差平方和:

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad (j = 1, \cdots, m)$$

分散:

$$v_j = \frac{s_j}{\alpha}, \quad (j = 1, \cdots, m)$$

標準偏差:

$$d_j = \sqrt{v_j}, \quad (j = 1, \cdots, m)$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n - 1$, 標本分散を用いる場合は n となる.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2BAMS (A, NA, N, M, NS, STAT, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2BAMS (A, NA, N, M, NS, STAT, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	NA,M	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ij}) または (y_{ij})
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	N	I	1	入 力	配列 A に格納した標本当たりの観測値の数 n
4	M	I	1	入 力	標本の数 m
5	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の標本当たりの観測値の数 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	標本当たりの観測値の数 n
6	STAT	{D/R}	M,5	入 力	観測値を追加する前の基礎統計量 (注意事項 (a) 参照) (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた基礎統計量 (注意事項 (a) 参照)
7	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏推定値を利用して計算 (既知統計量なし) 1: 不偏推定値を利用して計算 (観測値追加) 2: 標本分散を利用して計算 (既知統計量なし) 3: 標本分散を利用して計算 (観測値追加)
8	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW=0, 1, 2, 3

(b) NA≥N≥1

(c) M≥1

(d) NS≥1 (ISW=1 または 3 のとき)

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	N=1 のときに不偏推定値を求めようとした.	分散と標準偏差に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (b), (c) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) 注意事項

(a) 基礎統計量は配列 STAT に次のように格納される.

STAT (j, 1) : 総和 t_j
STAT (j, 2) : 平均 $\bar{x}_j$
STAT (j, 3) : 偏差平方和 s_j , ($j = 1, \cdots$,M)
STAT (j, 4) : 分散 v_j
STAT (j, 5) : 標準偏差 d_j

(b) 各標本について同数の観測値を追加した場合の基礎統計量を求めたい場合には, 観測値を追加するまえに計算した STAT, NS の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 または 3, に設定して計算を行えば良い. ただし, 分散や標準偏差を求める場合には, 前回標本分散を利用して計算した場合は引き続き標本分散を利用して計算する様に, 不偏推定値を計算した場合は引き続き不偏推定値を計算する様に, ISW の値を設定する必要がある.

(c) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(d) 不偏推定値を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本分散を利用して計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) 使用例

(a) 問 題

観測値が以下のような行列 X で与えられているとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差) を求める.

$$X = \begin{bmatrix} 30 & 35 & 44 & 44 & 45 \\ 424 & 365 & 346 & 349 & 297 \\ 246 & 219 & 255 & 252 & 256 \end{bmatrix}$$

さらに以下のような行列 Y で与えられる観測値が追加されたときに各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差) を求める.

$$Y = \begin{bmatrix} 18 & 21 & 56 & 21 & 45 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

観測値を格納した行列 X, NA=100, N=3, M=5, ISW=0

2 回目の処理:

観測値を格納した行列 Y, NA=100, N=2, M=5, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2BAMS
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, M = 5 )
      DIMENSION A(NA,M),STAT(M,5)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =  0
      ISW  =  0
      READ(5,*) N
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  110 CONTINUE
      CALL D2BAMS(A,NA,N,M,NS,STAT,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      DO 120 J=1,M
         WRITE(6,6050) J,(STAT(J,I),I=1,5)
  120 CONTINUE
```

```
!
      WRITE(6,6060)
      IERR =  0
      ISW  =  1
      READ(5,*) N
      DO 130 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 140 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  140 CONTINUE
      CALL D2BAMS(A,NA,N,M,NS,STAT,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      DO 150 J=1,M
         WRITE(6,6050) J,(STAT(J,I),I=1,5)
  150 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2BAMS ***',/,&
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'N = ',I6,5X,'M = ',I6,/,&
              /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',I6,/,&
              /,45X,'SUM OF',16X,'STANDARD',/,&
               8X,'VARIABLE',8X,'SUM',8X,'MEAN',5X,'SQUARES',4X,&
                  'VARIANCE',3X,'DEVIATION',/,&
               7X,70('-'))
 6050 FORMAT(  7X,I6,3X,3(1X,F11.2),2(1X,D11.4))
 6060 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D2BAMS ***

   *** FIRST PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      0

       N =      3     M =      5

       OBSERVATION MATRIX

               30.00        35.00        44.00        44.00        45.00
              424.00       365.00       346.00       349.00       297.00
              246.00       219.00       255.00       252.00       256.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =      3

                                             SUM OF                STANDARD
        VARIABLE        SUM        MEAN     SQUARES    VARIANCE   DEVIATION
       ----------------------------------------------------------------------
            1        700.00      233.33    77858.67  0.3893D+05  0.1973D+03
            2        619.00      206.33    54690.67  0.2735D+05  0.1654D+03
            3        645.00      215.00    48002.00  0.2400D+05  0.1549D+03
            4        645.00      215.00    48566.00  0.2428D+05  0.1558D+03
            5        598.00      199.33    36568.67  0.1828D+05  0.1352D+03


   *** CONTINUATION PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      1

       N =      2     M =      5

       OBSERVATION MATRIX

               18.00        21.00        56.00        21.00        45.00
                2.00         2.00         3.00         1.00         3.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =      5

                                             SUM OF                STANDARD
        VARIABLE        SUM        MEAN     SQUARES    VARIANCE   DEVIATION
       ----------------------------------------------------------------------
            1        720.00      144.00   137840.00  0.3446D+05  0.1856D+03
            2        642.00      128.40   100423.20  0.2511D+05  0.1584D+03
            3        704.00      140.80    90698.80  0.2267D+05  0.1506D+03
            4        667.00      133.40    98705.20  0.2468D+05  0.1571D+03
            5        646.00      129.20    74340.80  0.1859D+05  0.1363D+03
```

4.2.4 D2BAGM, R2BAGM
幾何平均

(1) **機 能**

n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i=1,\cdots,n)$ が与えられたとき, 幾何平均とその標準偏差を求める. または, n 個の観測値 $\{y_i\}(i=1,\cdots,n)$ を追加した場合における幾何平均とその標準偏差を求める.

なお, n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i=1,\cdots,n)$ に対する幾何平均とそれらの標準偏差は, それぞれ次式で定義される.

幾何平均:

$$\mathrm{GM} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

標準偏差:

$$\mathrm{GSD} \quad = \quad \exp\left(\sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\log x_i)^2 - n(\log \mathrm{GM})^2}{\alpha}}\right)$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n-1$, 標本分散を用いる場合は n となる.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2BAGM (A, N, NS, GM, GSD, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2BAGM (A, N, NS, GM, GSD, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D / R}	N	入 力	観測値列 $\{x_i\}$ または $\{y_i\}$
2	N	I	1	入 力	観測値の数 n
3	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の観測値の数 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	観測値の数 n
4	GM	{D / R}	1	入 力	観測値を追加する前の幾何平均 (注意事項 (a) 参照) (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた幾何平均 (注意事項 (a) 参照)
5	GSD	{D / R}	1	入 力	観測値を追加する前の標準偏差 (注意事項 (a) 参照) (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた標準偏差 (注意事項 (a) 参照)
6	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏推定値を利用して計算 (既知統計量なし) 1: 不偏推定値を利用して計算 (観測値追加) 2: 標本分散を利用して計算 (既知統計量なし) 3: 標本分散を利用して計算 (観測値追加)
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW $=$ 0, 1, 2, 3

(b) N $\geq$ 1

(c) NS $\geq$ 1 (ISW=1 または 3 のとき)

(d) $\mathrm{A(i)} > 0.0 (\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{N})$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	N = 1 のときに不偏推定値を求めようとした.	標準偏差に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値を追加した場合の統計量を求めたい場合には, 観測値を追加する前に計算した GM, GSD, NS の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 または 3 に設定して計算を行えば良い.

(b) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(c) 不偏推定値を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本分散を利用して計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

以下のような観測値列が与えられたとき, 幾何平均とその標準偏差を求める.

$$\begin{aligned}\{x_i\} &= \{1100, 2630, 695, 3630, 1550, 1010, 2110, 736, 1260, 1690,\\ &\quad 2680, 2520, 2030, 1280, 2400\}\end{aligned}$$

さらに以下のような観測値列が追加されたとき, 幾何平均とその標準偏差を求める.

$$\{y_i\} = \{938, 1860, 2410, 3370, 1380, 2200, 2290, 1220, 1150\}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

観測値列 $\{x_i\}$, N=15, ISW=0

2 回目の処理:

観測値列 $\{y_i\}$, N=9, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2BAGM
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100 )
      DIMENSION A(NA)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =  0
      ISW  =  0
      READ(5,*) N
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N
      WRITE(6,6020) (A(I),I=1,N)
      CALL D2BAGM(A,N,NS,GM,GSD,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS,GM,GSD
!
      WRITE(6,6050)
      IERR =  0
      ISW  =  1
      READ(5,*) N
      DO 110 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N
      WRITE(6,6020) (A(I),I=1,N)
      CALL D2BAGM(A,N,NS,GM,GSD,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS,GM,GSD
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2BAGM ***',/,&
             /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
             /,7X,'N = ',I6)
 6020 FORMAT( /,7X,'OBSERVATIONS',/,/,&
                3(6X,5(2X,F11.2),/))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
```

```
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',5X,I6,/,&
              /,7X,'GM                = ',D15.8,/,&
              /,7X,'GSD               = ',D15.8)
 6050 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D2BAGM ***

   *** FIRST PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      0

       N =     15

       OBSERVATIONS

            1100.00      2630.00       695.00      3630.00      1550.00
            1010.00      2110.00       736.00      1260.00      1690.00
            2680.00      2520.00      2030.00      1280.00      2400.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =          15

       GM                =  0.16347482D+04

       GSD               =  0.16419280D+01

   *** CONTINUATION PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      1

       N =      9

       OBSERVATIONS

             938.00      1860.00      2410.00      3370.00      1380.00
            2200.00      2290.00      1220.00      1150.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =          24

       GM                =  0.16695395D+04

       GSD               =  0.15843787D+01
```

4.2.5 D2BAMO, R2BAMO 積率 (モーメント)

(1) **機 能**

m 個の等幅の階級 $C_i = [x_i, x_i + h)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ が与えられて,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{min} \\ x_{i+1} &= x_i + h \quad\quad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_{max} &= x_m + h \end{aligned}$$

を満たすとする. ここで h は階級の幅であり,

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}$$

このとき, 次式で定義される階級 C_i の度数を f_i とした場合の原点まわりの 1 次モーメントまたは平均値のまわりの r 次モーメントを求める.

原点まわりの 1 次モーメント:

$$\mu'_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_i \hat{x}_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_i}$$

平均値のまわりの r 次モーメント:

$$\mu_r = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} [f_i(\hat{x}_i - \mu'_1)^r]}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_i} \quad\quad (r = 2, 3, \cdots)$$

なお, $\hat{x}_i$ は各階級の階級値を表し,

$$\hat{x}_i = x_{min} + (i - 0.5)h$$

で与えられる.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2BAMO (F, M, XMAX, XMIN, NP, XM, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2BAMO (F, M, XMAX, XMIN, NP, XM, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: 32 ビット整数版では INTEGER(4)、64 ビット整数版では INTEGER(8)

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	F	{D, R}	M	入 力	度数 f_i.
2	M	I	1	入 力	級の数 m
3	XMAX	{D, R}	1	入 力	最大の級の上限 x_{max}
4	XMIN	{D, R}	1	入 力	最小の級の下限 x_{min}
5	NP	I	1	入 力	求めるモーメントの次数 r NP=1 のときは, 原点まわりの 1 次モーメントが求められる.
6	XM	{D, R}	1	出 力	モーメント μ'_1 または μ_r $(r = 2, \cdots, m)$
7	WK	{D, R}	M	ワーク	作業領域
8	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) XMAX > XMIN

(b) $\mathrm{M} \geq 1$

(c) $\mathrm{NP} \geq 1$

(d) $\mathrm{F(i)} \geq 0.0 \quad (\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{M})$

(e) $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{M}} \mathrm{F(i)} > 0.0$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意味	処理内容
0	正常終了.	
1000	XMAX < XMIN	XMAX と XMIN を入れ換えて処理を続ける.
3000	XMAX = XMIN であった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 定義より原点のまわりの 1 次のモーメントは平均, 平均の周りの 2 次のモーメントは分散となる.

(b) 観測値の分布の非対称の程度を表す指標として**歪度**がある. 歪度としては平均値のまわりの 2 次および 3 次のモーメント (μ_2, μ_3) を用いて定義される $\alpha_3 = \dfrac{\mu_3}{\sqrt{{\mu_2}^3}}$ またはその 2 乗が用いられる.

(c) 観測値の分布の尖り方の程度を表す指標として**尖度**がある. 尖度としては平均値のまわりの 2 次および 4 次のモーメント (μ_2, μ_4) を用いて定義される $\alpha_4 = \dfrac{\mu_4}{{\mu_2}^2}$ または $\alpha_4 - 3$ が用いられる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

区間 $[0, 80]$ が 20 個の等間隔の級区間に区分けされており, 級ごとの実測度数 $F_1, F_2, \cdots, F_{20}$ が以下のように与えられているとき, 4 次のモーメントを求める.

級	F_i
1	527
2	501
3	1082
4	2177
5	2958

級	F_i
6	3942
7	3737
8	3012
9	2489
10	1801

級	F_i
11	1496
12	1044
13	874
14	607
15	450

級	F_i
16	448
17	283
18	260
19	207
20	144

(b) 入力データ

実測度数 $\{F_i\}$, M=20, XMAX=80.0, XMIN=0.0, NP=20

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2BAMO
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NF = 100 )
      DIMENSION F(NF),WK(NF)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =    0
      READ(5,*) M
      READ(5,*) XMAX
      READ(5,*) XMIN
      READ(5,*) NP
      DO 100 I=1,M
         READ(5,*) F(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) M,XMAX,XMIN,NP
      WRITE(6,6020) (F(I),I=1,M)
      CALL D2BAMO(F,M,XMAX,XMIN,NP,XM,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) XM
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2BAMO ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'M  = ',I6,/,&
              /,7X,'UPPER LIMIT = ',F11.2,5X,'LOWER LIMIT = ',F11.2,/,&
              /,7X,'ORDER OF MOMENT = ',I6)
 6020 FORMAT( /,7X,'FREQUENCIES',/,/,&
                   4(6X,5(2X,F11.2),/))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'MOMENT = ',F11.2)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D2BAMO ***

  ** INPUT **

      M  =     20

      UPPER LIMIT =       80.00     LOWER LIMIT =        0.00

      ORDER OF MOMENT =      4

      FREQUENCIES

            527.00       501.00      1082.00      2177.00      2958.00
           3942.00      3737.00      3012.00      2489.00      1801.00
           1496.00      1044.00       874.00       607.00       450.00
```

```
        448.00       283.00       260.00       207.00       144.00

** OUTPUT **
    IERR =      0
    MOMENT =   173638.61
```

4.2.6 D2BAHM, R2BAHM 調和平均

(1) **機 能**

n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i = 1, \cdots, n)$ が与えられたとき, 調和平均を求める. または, n 個の観測値 $\{y_i\}(i = 1, \cdots, n)$ を追加した場合における調和平均を求める.

なお, n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i = 1, \cdots, n)$ に対する調和平均は, 次式で定義される.

調和平均:

$$\mathrm{HM} = \frac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2BAHM (A, N, NS, HM, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2BAHM (A, N, NS, HM, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	N	入 力	観測値列 $\{x_i\}$ または $\{y_i\}$
2	N	I	1	入 力	観測値の数 n
3	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の観測値の数 (ISW=0 の場合は初期設定不要)
				出 力	観測値の数 n
4	HM	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	観測値を追加する前の調和平均 (注意事項 (a) 参照) (ISW=0 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた調和平均 (注意事項 (a) 参照)
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 既知統計量なし 1: 観測値追加
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW = 0, 1

(b) N ≥ 1

(c) NS ≥ 1 (ISW=1 のとき)

(d) $A(i) \neq 0.0 (i = 1, 2, \cdots, N)$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
3000	制限条件 (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (d) を満足しなかった.	
4000	調和平均の分母がゼロになった.	調和平均に表現できる絶対値最大値を設定する

(6) **注意事項**

(a) 観測値を追加した場合の統計量を求めたい場合には, 観測値を追加する前に計算した HM, NS の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 に設定して計算を行えば良い.

(b) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

以下のような観測値列が与えられたとき, 調和平均を求める.

$$\{x_i\} = \{300, 600, 150, 30, 20, 120, 200, 100, 50, 40, 50\}$$

さらに以下のような観測値列が追加されたとき, 調和平均を求める.

$$\{y_i\} = \{120, 1200, 300, 150, 600, -120, 240, 200, -100, -50\}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

観測値列 $\{x_i\}$, N=11, ISW=0

2 回目の処理:

観測値列 $\{y_i\}$, N=10, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2BAHM
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100 )
      DIMENSION A(NA)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =  0
      ISW  =  0
      READ(5,*) N
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
```

```
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N
      WRITE(6,6020) (A(I),I=1,N)
      CALL D2BAHM(A,N,NS,HM,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS,HM
!
      WRITE(6,6050)
      IERR =  0
      ISW  =  1
      READ(5,*) N
      DO 110 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N
      WRITE(6,6020) (A(I),I=1,N)
      CALL D2BAHM(A,N,NS,HM,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS,HM
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2BAHM ***',/,&
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'N = ',I6)
 6020 FORMAT( /,7X,'OBSERVATIONS',/,/,&
                   3(6X,5(2X,F11.2),/))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',5X,I6,/,&
              /,7X,'HM                = ',D15.8)
 6050 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D2BAHM ***

  *** FIRST PROCESSING ***

  ** INPUT **

      ISW =      0

      N =     11

      OBSERVATIONS

            300.00       600.00       150.00        30.00        20.00
            120.00       200.00       100.00        50.00        40.00
             50.00

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      TOTAL SAMPLE SIZE =          11

      HM                =  0.60000000D+02


  *** CONTINUATION PROCESSING ***

  ** INPUT **

      ISW =      1

      N =     10

      OBSERVATIONS

            120.00      1200.00       300.00       150.00       600.00
           -120.00       240.00       200.00      -100.00       -50.00


  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      TOTAL SAMPLE SIZE =          21

      HM                =  0.12000000D+03
```

4.2.7 D2BASM, R2BASM 2 乗平均平方根

(1) **機 能**

n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i=1,\cdots,n)$ が与えられたとき, 2 乗平均平方根を求める. または, n 個の観測値 $\{y_i\}(i=1,\cdots,n)$ を追加した場合における 2 乗平均平方根を求める.

なお, n 個の観測値からなる標本 $\{x_i\}(i=1,\cdots,n)$ に対する 2 乗平均平方根は, 次式で定義される.

2 乗平均平方根:

$$\mathrm{SM}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2BASM (A, N, NS, SM, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2BASM (A, N, NS, SM, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	N	入 力	観測値列 $\{x_i\}$ または $\{y_i\}$
2	N	I	1	入 力	観測値の数 n
3	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の観測値の数 (ISW=0 の場合は初期設定不要)
				出 力	観測値の数 n
4	SM	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	観測値を追加する前の 2 乗平均平方根 (注意事項 (a) 参照) (ISW=0 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた 2 乗平均平方根 (注意事項 (a) 参照)
5	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 既知統計量なし 1: 観測値追加
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $=0,1$

(b) N ≥ 1

(c) NS ≥ 1 (ISW=1 のとき)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
3000	制限条件 (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値を追加した場合の統計量を求めたい場合には, 観測値を追加する前に計算した SM, NS の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 に設定して計算を行えば良い.

(b) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

以下のような観測値列が与えられたとき, 2 乗平均平方根を求める.

$$\{x_i\} \quad = \quad \{90, 60, 30, 95, 40, 80, 25, 50, 70, 50\}$$

さらに以下のような観測値列が追加されたとき, 2 乗平均平方根を求める.

$$\{y_i\} = \{60, 60, 60, 70, 60, 60, 50, 60, 60, 60\}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

観測値列 $\{x_i\}$, N=11, ISW=0

2 回目の処理:

観測値列 $\{y_i\}$, N=10, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2BASM
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100 )
      DIMENSION A(NA)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =  0
      ISW  =  0
      READ(5,*) N
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N
      WRITE(6,6020) (A(I),I=1,N)
      CALL D2BASM(A,N,NS,SM,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS,SM
!
      WRITE(6,6050)
      IERR =  0
      ISW  =  1
      READ(5,*) N
      DO 110 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N
      WRITE(6,6020) (A(I),I=1,N)
      CALL D2BASM(A,N,NS,SM,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS,SM
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2BASM ***',/,&
```

```
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'N = ',I6)
 6020 FORMAT( /,7X,'OBSERVATIONS',/,/,&
                   3(6X,5(2X,F11.2),/))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',5X,I6,/,&
              /,7X,'SM                = ',D15.8)
 6050 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D2BASM ***

   *** FIRST PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      0

       N =     11

       OBSERVATIONS

              90.00         60.00         30.00         95.00         40.00
              80.00         25.00         50.00         70.00         70.00
              50.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =          11

       SM                =  0.63995738D+02


   *** CONTINUATION PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      1

       N =     10

       OBSERVATIONS

              60.00         60.00         60.00         70.00         60.00
              60.00         50.00         60.00         60.00         60.00


   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =          21

       SM                =  0.62201669D+02
```

4.3 分散共分散

4.3.1 D2VCMT, R2VCMT
分散共分散行列

(1) **機 能**

n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ki}\}(k=1,\cdots,n; i=1,\cdots,m)$ が与えられたとき, 各標本ごとの平均とそれらの標本間の分散, 共分散を求める. または, 平均と分散, 共分散が分かっている m 個の標本のそれぞれに n 個の観測値 $\{y_{ki}\}$ $(k=1,\cdots,n; i=1,\cdots,m)$ を追加した場合の平均と分散, 共分散を求める.

なお, n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ki}\}$ $(k=1,\cdots,n; i=1,\cdots,m)$ に対する平均とそれらの標本間の分散, 共分散は, それぞれ次式で定義される.

平均:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{ki}}{n} \qquad i=1,\cdots,m$$

分散, 共分散:

$$d_{ij} = \frac{s_{ij}}{\alpha} \qquad i,j=1,\cdots,m$$

ただし, s_{ij}(偏差積和行列):

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(x_{ki}-\bar{x}_i)(x_{kj}-\bar{x}_j) \qquad i,j=1,\cdots,m$$

ここで, α は標本共分散を用いる場合は n, 不偏共分散を用いる場合は $n-1$ となる. なお分散共分散行列の対角要素は分散になる.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2VCMT (A, NA, N, M, NS, X1, D, ND, ISW, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2VCMT (A, NA, N, M, NS, X1, D, ND, ISW, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　 { 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	NA,M	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ki}) または (y_{ki})(注意事項 (a) 参照)
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	N	I	1	入 力	配列 A に格納した標本当たりの観測値の数 n
4	M	I	1	入 力	標本の数 m
5	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の標本当たりの観測値の数 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	標本当たりの観測値の数 n
6	X1	{D/R}	M	入 力	観測値を追加する前の各標本の平均 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた各標本の平均
7	D	{D/R}	ND,M	入 力	観測値を追加する前の分散共分散行列 (注意事項 (b) 参照) (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた分散共分散行列 (注意事項 (b) 参照)
8	ND	I	1	入 力	配列 D の整合寸法
9	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏共分散を計算 (前回の結果を使用しない場合) 1: 不偏共分散を計算 (前回の結果を使用する場合) 2: 標本共分散を計算 (前回の結果を使用しない場合) 3: 標本共分散を計算 (前回の結果を使用する場合)
10	WK	{D/R}	M	ワーク	作業領域
11	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW $= 0, 1, 2, 3$

(b) NA $\geq$ N ≥ 1

(c) ND $\geq$ M ≥ 1

(d) NS ≥ 1 (ISW=1 または 3 のとき)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	N = 1 のときに不偏共分散を求めようとした.	共分散に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (b) または (c) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値 x_{ki} または y_{ki} $(k = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, m)$ は実行列 (2 次元配列型) データとして配列 A に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(b) 各標本について同数の観測値を追加した場合の平均と共分散を求めたい場合には, 観測値を追加するまえに計算した D, NS の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 または 3, に設定して計算を行えば良い. ただし, 共分散を求める場合には, 前回標本共分散を計算した場合は引き続き標本共分散を計算する様に, 不偏共分散を計算した場合は引き続き不偏共分散を計算する様に, ISW の値を設定する必要がある.

(c) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(d) 不偏共分散を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本共分散を計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値が以下のような行列 X で与えられたとき, 各標本ごとの平均とそれらの標本間の共分散を求める.

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 36 & 61 & 24 \\ 18 & 36 & 43 & 63 & 31 \\ 8 & 11 & 46 & 27 & 15 \\ 6 & 16 & 35 & 64 & 25 \\ 22 & 30 & 40 & 66 & 32 \\ 10 & 11 & 40 & 30 & 18 \\ 17 & 27 & 45 & 55 & 30 \end{bmatrix}$$

さらに以下のような行列 Y で与えられる観測値が追加されたとき, 各標本ごとの平均とそれらの標本間の共分散を求める.

$$Y = \begin{bmatrix} 15 & 19 & 29 & 57 & 26 \\ 9 & 14 & 31 & 67 & 7 \\ 18 & 18 & 37 & 61 & 20 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

観測値行列 X, NA=100, N=7, M=5, ISW=0

2 回目の処理:

観測値行列 Y, NA=100, N=3, M=5, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2VCMT
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, M = 5, ND = 10 )
      DIMENSION A(NA,M),X1(M),D(ND,M),WK(M)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =   0
      ISW  =   0
      READ(5,*) N
      DO 100 I = 1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  110 CONTINUE
      CALL D2VCMT(A,NA,N,M,NS,X1,D,ND,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      WRITE(6,6050) (X1(J),J=1,M)
      WRITE(6,6060)
      DO 120 I=1,M
         WRITE(6,6070) (D(I,J),J=1,M)
  120 CONTINUE
!
      WRITE(6,6080)
      IERR =  0
      ISW  =  1
      READ(5,*) N
      DO 130 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 140 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  140 CONTINUE
      CALL D2VCMT(A,NA,N,M,NS,X1,D,ND,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      WRITE(6,6050) (X1(J),J=1,M)
      WRITE(6,6060)
      DO 150 I=1,M
         WRITE(6,6070) (D(I,J),J=1,M)
  150 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2VCMT ***',/,&
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'N = ',I6,5X,'M = ',I6,/,&
              /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',I6,/,&
              /,7X,'MEAN',/)
 6050 FORMAT(      5(2X,F11.2))
 6060 FORMAT( /,7X,'COVARIANCE MATRIX',/)
 6070 FORMAT(  9X,5(1X,D11.4))
 6080 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D2VCMT ***

  *** FIRST PROCESSING ***

  ** INPUT **

      ISW =      0

      N =      7     M =      5

      OBSERVATION MATRIX

              7.00        15.00        36.00        61.00        24.00
             18.00        36.00        43.00        63.00        31.00
              8.00        11.00        46.00        27.00        15.00
              6.00        16.00        35.00        64.00        25.00
             22.00        30.00        40.00        66.00        32.00
             10.00        11.00        40.00        30.00        18.00
             17.00        27.00        45.00        55.00        30.00

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      TOTAL SAMPLE SIZE =      7
```

```
    MEAN

     12.57        20.86        40.71        52.29        25.00

    COVARIANCE MATRIX

        0.3995D+02  0.5510D+02  0.1102D+02  0.4114D+02  0.3167D+02
        0.5510D+02  0.1005D+03  0.1079D+02  0.1109D+03  0.5983D+02
        0.1102D+02  0.1079D+02  0.1790D+02 -0.3324D+02 -0.2167D+01
        0.4114D+02  0.1109D+03 -0.3324D+02  0.2766D+03  0.9567D+02
        0.3167D+02  0.5983D+02 -0.2167D+01  0.9567D+02  0.4333D+02

*** CONTINUATION PROCESSING ***

** INPUT **

    ISW =      1

    N =      3     M =      5

    OBSERVATION MATRIX

            15.00        19.00        29.00        57.00        26.00
             9.00        14.00        31.00        67.00         7.00
            18.00        18.00        37.00        61.00        20.00

** OUTPUT **

    IERR =      0

    TOTAL SAMPLE SIZE =     10

    MEAN

     13.00        19.70        38.20        55.10        22.80

    COVARIANCE MATRIX

        0.3178D+02  0.3778D+02  0.7000D+01  0.2678D+02  0.2656D+02
        0.3778D+02  0.7201D+02  0.1496D+02  0.6259D+02  0.5216D+02
        0.7000D+01  0.1496D+02  0.3218D+02 -0.3991D+02  0.1260D+02
        0.2678D+02  0.6259D+02 -0.3991D+02  0.2105D+03  0.3691D+02
        0.2656D+02  0.5216D+02  0.1260D+02  0.3691D+02  0.6240D+02
```

4.3.2 D2VCGR, R2VCGR 分散共分散行列 (群データ)

(1) **機 能**

g 個の群があって各群ごとに n_r 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ki}^{(r)}\}(k=1,\cdots,n_r; i=1,\cdots,m; r=1,\cdots,g)$ が与えられたとき, 各群における各標本ごとの平均, 全群を通しての各標本ごとの平均ならびに全群を通してのそれらの標本間の共分散を求める．または, 各群ごとの平均と全群を通しての平均と共分散が分かっている m 個の標本のそれぞれに各群ごとに n_r 個の観測値 $\{y_{ki}^{(r)}\}$ $(k=1,\cdots,n_r; i=1,\cdots,m; r=1,\cdots,g)$ を追加した場合の各群ごとの平均と全群を通しての平均と共分散を求める.

なお, $\{x_{ki}^{(r)}\}$ $(k=1,\cdots,n_r; i=1,\cdots,m; r=1,\cdots,g)$ に対する各群ごとの平均と全群を通しての平均と共分散は, それぞれ次式で定義される.

各群ごとの平均:

$$\bar{x}_i^{(r)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n_r} x_{ki}^{(r)}}{n_r} \qquad i=1,\cdots,m; r=1,\cdots,g$$

全群を通しての平均:

$$\bar{x}_i = \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{g} n_r \bar{x}^{(r)}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{g} n_r} \qquad i=1,\cdots,m$$

全群を通しての共分散:

$$d_{ij} = \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{g} s_{ij}^{(r)}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{g} \alpha_r} \qquad i,j=1,\cdots,m$$

ただし, 各群ごとの $s_{ij}^{(r)}$(偏差積和行列):

$$s_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n_r} (x_{ki}^{(r)} - \bar{x}_i^{(r)})(x_{kj}^{(r)} - \bar{x}_j^{(r)}) \qquad i,j=1,\cdots,m$$

ここで, α_r は標本共分散を用いる場合は n_r, 不偏共分散を用いる場合は n_r-1 となる．なお共分散行列の対角要素は分散になる.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2VCGR (A, NA, M, N, K, NS, X1, Y, NY, D, ND, ISW, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2VCGR (A, NA, M, N, K, NS, X1, Y, NY, D, ND, ISW, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	NA,M	入 力	観測値を格納した行列 $(x_{ki}^{(r)})$ または $(y_{ki}^{(r)})$(注意事項 (a) 参照)
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	M	I	1	入 力	標本の数 m
4	N	I	K	入 力	配列 A に格納した各群ごとの標本当たりの観測値の数 n_r
5	K	I	1	入 力	群の数 g
6	NS	I	K	入 力	観測値を追加する前の各群ごとの標本当たりの観測値の数 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	各群ごとの標本当たりの観測値の数 n_r
7	X1	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	M	入 力	観測値を追加する前の全群を通しての各標本の平均 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた全群を通しての各標本の平均
8	Y	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	NY,K	入 力	観測値を追加する前の群ごとの各標本の平均 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた群ごとの各標本の平均
9	NY	I	1	入 力	配列 Y の整合寸法
10	D	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	ND,M	入 力	観測値を追加する前の全群を通しての共分散行列 (注意事項 (a) 参照) (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた全群を通しての共分散行列 (注意事項 (a) 参照)
11	ND	I	1	入 力	配列 D の整合寸法
12	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏共分散を計算 (前回の結果を使用しない場合) 1: 不偏共分散を計算 (前回の結果を使用する場合) 2: 標本共分散を計算 (前回の結果を使用しない場合) 3: 標本共分散を計算 (前回の結果を使用する場合)
13	WK	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** $(\mathrm{M} \times (\mathrm{M} \times \mathrm{K} + 1))$
14	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW = 0, 1, 2, 3

(b) $\mathrm{M} \geq 1$

(c) $\mathrm{K} \geq 1$

(d) $\mathrm{ND} \geq \mathrm{M}$

(e) $\mathrm{NY} \geq \mathrm{M}$

(f) $\mathrm{N(i)} \geq \begin{cases} 1 & (\mathrm{ISW} = 0 \text{ or } 2\text{ のとき}) \\ 0 & (\mathrm{ISW} = 1 \text{ or } 3\text{ のとき}) \end{cases} \quad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{K})$

(g) $\mathrm{NS(i)} \geq 1 \quad (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{K})$ (ISW = 1 or 3 のとき)

(h) $\mathrm{NA} \geq \sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{N(i)}$

(i) $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{N(i)} \geq 1$ (ISW = 1 or 3 のとき)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	N(1) = ··· = N(K) = 1 のときに不偏共分散を求めようとした.	共分散に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (b)∼(f) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (g) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (h) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (i) を満足しなかった.	
4000	下位サブルーチンでエラーが発生した.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値は以下のような実行列 (2 次元配列型) として配列 A に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix}
x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{1m}^{(1)} \\
x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{2m}^{(1)} \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
x_{n_1 1}^{(1)} & x_{n_1 2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{n_1 m}^{(1)} \\
\\
x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{1m}^{(2)} \\
x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{2m}^{(2)} \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
x_{n_2 1}^{(2)} & x_{n_2 2}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{n_2 m}^{(2)} \\
\\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
\\
x_{11}^{(g)} & x_{12}^{(g)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{1m}^{(g)} \\
x_{21}^{(g)} & x_{22}^{(g)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{2m}^{(1)} \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
x_{n_g 1}^{(g)} & x_{n_g 2}^{(g)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_{n_g m}^{(g)}
\end{bmatrix}$$

(b) 各群ごとに各標本について同数の観測値を追加した場合の平均と共分散を求めたい場合には, 観測値を追加するまえに計算した NS, Y, WK の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 または 3, に設定して計算を行えば良い. ただし, 共分散を求める場合には, 前回標本共分散を計算した場合は引き続き標本共分散を計算する様に, 不偏共分散を計算した場合は引き続き不偏共分散を計算する様に, ISW の値を設定する必要がある.

(c) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(d) 不偏共分散を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本共分散を計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

3 個の群からなり, 各群ごとの観測値が以下のような行列 X_1, X_2, X_3 で与えられたとき, 各群における各標本ごとの平均, 全群を通しての各標本ごとの平均ならびに全群を通してのそれらの標本間の共分散を求める.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 7 \\ 11 & 5 & 8 \\ 12 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 17 & 12 & 8 \\ 18 & 11 & 6 \\ 18 & 13 & 7 \\ 17 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 11 \\ 12 & 6 & 12 \\ 13 & 8 & 10 \\ 15 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

さらに第 1 群ならびに第 3 群に以下のような行列 Y_1, Y_3 で与えられる観測値が追加されたとき, 各群における各標本ごとの平均, 全群を通しての各標本ごとの平均ならびに全群を通してのそれらの標本間の共分散を求める.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 9 \\ 15 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 18 & 10 & 13 \\ 14 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

群ごとの観測値行列 X_1, X_2, X_3,

NA=100, M=3, K=3, N(1)=3, N(2)=4, N(3)=4, NY=10, ND=10, ISW=0

2 回目の処理:

群ごとの観測値行列 Y_1, Y_3,

NA=100, M=3, K=3, N(1)=2, N(2)=0, N(3)=2, NY=10, ND=10, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2VCGR
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, M = 3, NY = 10, K = 3, ND = 10 )
      DIMENSION N(K),NS(K)
      DIMENSION A(NA,M),X1(M),Y(NY,K),D(ND,M),WK(M*M*K+M)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =  0
      ISW  =  0
      DO 100 I=1,K
         READ(5,*) N(I)
  100 CONTINUE
      IA = 0
      DO 110 II=1,K
         DO 120 I=1,N(II)
            READ(5,*) (A(IA+I,J),J=1,M)
  120    CONTINUE
         IA = IA + N(II)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,M,K
      WRITE(6,6020) (N(II),II=1,K)
      WRITE(6,6030)
      IA = 0
      DO 130 II=1,K
         WRITE(6,6040) II
         DO 140 I=1,N(II)
            WRITE(6,6050) (A(IA+I,J),J=1,M)
  140    CONTINUE
         IA = IA + N(II)
  130 CONTINUE
      CALL D2VCGR(A,NA,M,N,K,NS,X1,Y,NY,D,ND,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6060) IERR
      WRITE(6,6070)
      WRITE(6,6020) (NS(II),II=1,K)
      WRITE(6,6080)
      DO 150 II=1,K
         WRITE(6,6090) II,(Y(J,II),J=1,M)
  150 CONTINUE
      WRITE(6,6100)
      WRITE(6,6110) (X1(J),J=1,M)
      WRITE(6,6120)
      DO 160 J=1,M
         WRITE(6,6130) (D(J,L),L=1,M)
  160 CONTINUE
!
      WRITE(6,6140)
      IERR =  0
      ISW  =  1
      DO 170 I=1,K
         READ(5,*) N(I)
  170 CONTINUE
      IA = 0
      DO 180 II=1,K
         DO 190 I=1,N(II)
```

```
            READ(5,*) (A(IA+I,J),J=1,M)
  190    CONTINUE
         IA = IA + N(II)
  180 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,M,K
      WRITE(6,6020) (N(II),II=1,K)
      WRITE(6,6030)
      IA = 0
      DO 200 II=1,K
         WRITE(6,6040) II
         DO 210 I=1,N(II)
            WRITE(6,6050) (A(IA+I,J),J=1,M)
  210    CONTINUE
         IA = IA + N(II)
  200 CONTINUE
      CALL D2VCGR(A,NA,M,N,K,NS,X1,Y,NY,D,ND,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6060) IERR
      WRITE(6,6070)
      WRITE(6,6020) (NS(II),II=1,K)
      WRITE(6,6080)
      DO 220 II=1,K
         WRITE(6,6090) II,(Y(J,II),J=1,M)
  220 CONTINUE
      WRITE(6,6100)
      WRITE(6,6110) (X1(J),J=1,M)
      WRITE(6,6120)
      DO 230 J=1,M
         WRITE(6,6130) (D(J,L),L=1,M)
  230 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2VCGR ***',/,&
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'M = ',I6,5X,'K = ',I6,/,&
              /,7X,'NUMBER OF OBSERVATIONS IN EACH GROUP',/)
 6020 FORMAT(  9X,5(2X,I6))
 6030 FORMAT( /,7X,'OBSERVATION MATRIX')
 6040 FORMAT( /,9X,'GROUP ',I2)
 6050 FORMAT(  9X,5(2X,F11.2))
 6060 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6070 FORMAT( /,7X,'TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS IN EACH GROUP',/)
 6080 FORMAT( /,7X,'MEAN OF EACH GROUP',/,&
              /,10X,'GROUP',/,&
               9X,43('-'))
 6090 FORMAT(  7X,I6,2X,5(1X,F11.2))
 6100 FORMAT( /,7X,'MEAN OVER ALL GROUPS',/)
 6110 FORMAT(  9X,5(1X,F11.2))
 6120 FORMAT( /,7X,'COVARIANCE MATRIX',/)
 6130 FORMAT(  9X,5(1X,D11.4))
 6140 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D2VCGR ***

   *** FIRST PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      0

       M =      3     K =      3

       NUMBER OF OBSERVATIONS IN EACH GROUP

                3       4       4

       OBSERVATION MATRIX

         GROUP  1
                 10.00         3.00         7.00
                 11.00         5.00         8.00
                 12.00         7.00         6.00

         GROUP  2
                 17.00        12.00         8.00
                 18.00        11.00         6.00
                 18.00        13.00         7.00
                 17.00        11.00         6.00

         GROUP  3
                 11.00         4.00        11.00
                 12.00         6.00        12.00
                 13.00         8.00        10.00
                 15.00         5.00         6.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS IN EACH GROUP

                3       4       4

       MEAN OF EACH GROUP
```

```
   GROUP
 ------------------------------------------
    1         11.00        5.00        7.00
    2         17.50       11.75        6.75
    3         12.75        5.75        9.75

MEAN OVER ALL GROUPS

         14.00        7.73        7.91

COVARIANCE MATRIX

     0.1469D+01  0.7813D+00 -0.1719D+01
     0.7813D+00  0.2438D+01  0.1875D+00
    -0.1719D+01  0.1875D+00  0.3188D+01

*** CONTINUATION PROCESSING ***

** INPUT **

    ISW =      1

    M =      3     K =      3

    NUMBER OF OBSERVATIONS IN EACH GROUP

             2       0       2

    OBSERVATION MATRIX

      GROUP  1
              14.00         4.00         9.00
              15.00         6.00         8.00

      GROUP  2

      GROUP  3
              18.00        10.00        13.00
              14.00         5.00         7.00

** OUTPUT **

    IERR =      0

    TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS IN EACH GROUP

             5       4       6

    MEAN OF EACH GROUP

       GROUP
     ------------------------------------------
        1         12.40        5.00        7.60
        2         17.50       11.75        6.75
        3         13.83        6.33        9.83

    MEAN OVER ALL GROUPS

             14.33        7.33        8.27

    COVARIANCE MATRIX

         0.4086D+01  0.2069D+01  0.4278D+00
         0.2069D+01  0.3174D+01  0.1340D+01
         0.4278D+00  0.1340D+01  0.3899D+01
```

4.4 相関係数

4.4.1 D2CCMT, R2CCMT
相関係数行列

(1) **機 能**

n 個の観測値からなる m 個の標本 $\boldsymbol{x}_i = \{x_{ki}\}(k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$ が与えられたとき, 各標本における平均とそれらの標本間の相関係数を求める. または, m 個の標本のそれぞれに n 個の観測値 $\boldsymbol{y}_i = \{y_{ki}\}(k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$ を追加した場合の各標本における平均とそれらの標本間の相関係数を求める.

なお, 標本 $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, \cdots, m)$ の平均 $\bar{x}_i$ は次式で定義され

$$\bar{x}_i = \frac{t_i}{n}, \qquad i = 1, \cdots, m$$

ここで, t_i は総和:

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}, \qquad i = 1, \cdots, m$$

である. また, 標本 $\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{x}_j$ の間の相関係数 r_{ij} は次式で定義される.

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii} \cdot s_{jj}}}, \qquad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, m$$

ただし, s_{ij} は:

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j), \qquad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, m$$

である. なお, 行列 $R = (r_{ij})$ は相関係数行列と呼ばれる.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2CCMT (A, NA, N, M, NS, X1, R, NR, ISW, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2CCMT (A, NA, N, M, NS, X1, R, NR, ISW, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4)
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　　 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D, R}	NA,M	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ki}) または (y_{ki}) $(k = 1,\cdots,n;\ i = 1,\cdots,m)$
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	N	I	1	入 力	配列 A に格納した標本当たりの観測値の数 n
4	M	I	1	入 力	標本の数 m
5	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の標本当たりの観測値の数 (ISW=0 の場合は初期設定不要)
				出 力	標本当たりの観測値の数 n
6	X1	{D, R}	M	入 力	観測値を追加する前の各標本における平均 (ISW=0 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた各標本における平均
7	R	{D, R}	NR,M	入 力	観測値を追加する前の各標本間の相関係数 (ISW=0 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた各標本間の相関係数
8	NR	I	1	入 力	配列 R の整合寸法
9	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 最初の計算 (前回の結果を使用しない場合) 1: 観測値を追加 (前回の結果を使用する場合)
10	WK	{D, R}	M	ワーク	作業領域
11	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $=$ 0, 1

(b) NA $\geq$ N $\geq$ 1

(c) NR $\geq$ M $\geq$ 1

(d) NS $\geq$ 1 (ISW=1 のとき)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	ISW=0, N=1 のとき, 相関係数を求めようとした.	相関係数に表現できる絶対値最大値を設定する.
1020	ある標本のすべての値が等しいため分散がゼロになった.	
3000	制限条件 (b), (c) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 各標本について同数の観測値を追加した場合の統計量を求めたい場合には, 観測値を追加する前に計算した X1, R, NS, WK の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 に設定して計算を行えば良い.

(b) ISW=0 にて実行したジョブで IERR=1020 で終了した場合, 続けて ISW=1 にてジョブを実行しても, 結果は保証されない.

(c) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値が以下のような行列 X で与えられたとき, 各標本における平均とそれらの標本間の相関係数を求める.

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 15 & 60 & 24 \\ 13 & 25 & 13 & 61 & 30 \\ 9 & 24 & 12 & 62 & 31 \\ 7 & 25 & 11 & 63 & 32 \\ 6 & 20 & 15 & 18 & 15 \\ 10 & 30 & 10 & 27 & 17 \\ 7 & 11 & 15 & 60 & 25 \end{bmatrix}$$

さらに以下のような行列 Y で与えられる観測値が追加されたとき, 各標本における平均とそれらの標本間の相関係数を求める.

$$Y = \begin{bmatrix} 16 & 25 & 13 & 64 & 30 \\ 9 & 26 & 13 & 66 & 32 \\ 8 & 26 & 13 & 66 & 34 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

観測値を格納した行列 X, NA=100, N=7, M=5, ISW=0

2 回目の処理:

観測値を格納した行列 Y, NA=100, N=3, M=5, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2CCMT
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 20, NR = 5, M = 5 )
      DIMENSION A(NA,M),R(NR,M),X1(M),WK(M)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =  0
      ISW  =  0
      READ(5,*) N
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  110 CONTINUE
      CALL D2CCMT(A,NA,N,M,NS,X1,R,NR,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      WRITE(6,6050) (X1(I),I=1,M)
      WRITE(6,6060)
```

```
      DO 120 I=1,M
         WRITE(6,6070) (R(I,J),J=1,M)
  120 CONTINUE
!
      WRITE(6,6080)
      IERR = 0
      ISW  = 1
      READ(5,*) N
      DO 130 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 140 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  140 CONTINUE
      CALL D2CCMT(A,NA,N,M,NS,X1,R,NR,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      WRITE(6,6050) (X1(I),I=1,M)
      WRITE(6,6060)
      DO 150 I=1,M
         WRITE(6,6070) (R(I,J),J=1,M)
  150 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2CCMT ***',/,&
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'N = ',I6,5X,'M = ',I6,/,&
              /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',I6,/,&
              /,7X,'MEAN',/)
 6050 FORMAT(      5(2X,F11.2))
 6060 FORMAT( /,7X,'CORRELATION COEFFICIENT MATRIX',/)
 6070 FORMAT(  7X,5(2X,D11.4))
 6080 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D2CCMT ***

  *** FIRST PROCESSING ***

  ** INPUT **

      ISW =      0

      N =      7     M =      5

      OBSERVATION MATRIX

               7.00         9.00        15.00        60.00        24.00
              13.00        25.00        13.00        61.00        30.00
               9.00        24.00        12.00        62.00        31.00
               7.00        25.00        11.00        63.00        32.00
               6.00        20.00        15.00        18.00        15.00
              10.00        30.00        10.00        27.00        17.00
               7.00        11.00        15.00        60.00        25.00

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      TOTAL SAMPLE SIZE =      7

      MEAN

        8.43        20.57        13.00        50.14        24.86

      CORRELATION COEFFICIENT MATRIX

         0.1000D+01   0.5450D+00  -0.4266D+00   0.1845D+00   0.2970D+00
         0.5450D+00   0.1000D+01  -0.8614D+00  -0.2936D+00   0.4911D-01
        -0.4266D+00  -0.8614D+00   0.1000D+01   0.2936D-01  -0.2129D+00
         0.1845D+00  -0.2936D+00   0.2936D-01   0.1000D+01   0.9186D+00
         0.2970D+00   0.4911D-01  -0.2129D+00   0.9186D+00   0.1000D+01


  *** CONTINUATION PROCESSING ***

  ** INPUT **

      ISW =      1

      N =      3     M =      5

      OBSERVATION MATRIX

              16.00        25.00        13.00        64.00        30.00
               9.00        26.00        13.00        66.00        32.00
               8.00        26.00        13.00        66.00        34.00

  ** OUTPUT **
```

```
IERR =      0

TOTAL SAMPLE SIZE =     10

MEAN

  9.20        22.10        13.00        54.70        27.00

CORRELATION COEFFICIENT MATRIX

   0.1000D+01   0.4416D+00  -0.2724D+00   0.2554D+00   0.2813D+00
   0.4416D+00   0.1000D+01  -0.8030D+00  -0.9303D-01   0.2320D+00
  -0.2724D+00  -0.8030D+00   0.1000D+01   0.2655D-01  -0.1788D+00
   0.2554D+00  -0.9303D-01   0.2655D-01   0.1000D+01   0.9244D+00
   0.2813D+00   0.2320D+00  -0.1788D+00   0.9244D+00   0.1000D+01
```

4.4.2 D2CCMA, R2CCMA 重相関係数

(1) **機 能**

n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ki}\}(k=1,\cdots,n; i=1,\cdots,m)$ が与えられたとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差) , および, 重相関係数を求める. または, 基礎統計量が分かっている m 個の標本のそれぞれに n 個の観測値 $\{y_{ki}\}$ $(k=1,\cdots,n; i=1,\cdots,m)$ を追加した場合の基礎統計量, および, 重相関係数を求める.

なお, n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ki}\}$ $(k=1,\cdots,n; i=1,\cdots,m)$ に対する基礎統計量, および, 重相関係数は, それぞれ次式で定義される.

総和:

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}, \quad i=1,\cdots,m$$

平均:

$$\bar{x}_i = \frac{t_i}{n}, \quad i=1,\cdots,m$$

偏差平方和:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)^2, \quad i=1,\cdots,m$$

分散:

$$v_i = \frac{s_i}{\alpha}, \quad i=1,\cdots,m$$

標準偏差:

$$d_i = \sqrt{v_i}, \quad i=1,\cdots,m$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n-1$, 標本分散を用いる場合は n となる.

重相関係数:

$$r_{i\cdot 1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m} = \sqrt{1-\frac{\Delta}{\Delta_{ii}}}, \quad i=1,\cdots,m$$

ここで, Δ と Δ_{ij} は, 相関係数 r_{ij} $(i,j=1,\cdots,m)$ を要素とする行列の行列式と余因子行列である.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2CCMA (A, NA, N, M, NS, STAT, R, ISW, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2CCMA (A, NA, N, M, NS, STAT, R, ISW, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	{D/R}	NA,M	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ki}) または (y_{ki})(注意事項 (a) 参照)
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	N	I	1	入 力	配列 A に格納した標本当たりの観測値の数 n
4	M	I	1	入 力	標本の数 m
5	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の標本当たりの観測値の数 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	標本当たりの観測値の数 n
6	STAT	{D/R}	M,5	入 力	観測値を追加する前の基礎統計量 (注意事項 (b) 参照) (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた基礎統計量 (注意事項 (b) 参照)
7	R	{D/R}	M	出 力	各標本ごとの重相関係数
8	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏推定値を利用して計算 (既知統計量なし) 1: 不偏推定値を利用して計算 (観測値追加) 2: 標本分散を利用して計算 (既知統計量なし) 3: 標本分散を利用して計算 (観測値追加)
9	WK	{D/R}	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** 2×M×M+ 3×M
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW = 0, 1, 2, 3

(b) NA ≥ N ≥ 1

(c) M ≥ 1

(d) NS ≥ 1 (ISW=1 または 3 のとき)

(e) N ≥ M (ISW=0 または 2 のとき)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	N = 1 であった.	ISW=0 のとき: 分散と標準偏差, 重相関係数に表現できる絶対値最大値を設定する. ISW=2 のとき: 重相関係数に表現できる絶対値最大値を設定する.
1020	ある標本のすべての値が等しいため分散がゼロになった.	重相関係数に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (b), (c) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (e) を満足しなかった.	
4000	単相関行列の逆行列が求められなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値 x_{ki} または y_{ki} $(k = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, m)$ は実行列 (2 次元配列型) データとして配列 A に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(b) 基礎統計量は配列 STAT に次のように格納される.

STAT $(i, 1)$: 総和 t_i
STAT $(i, 2)$: 平均 $\bar{x}_i$
STAT $(i, 3)$: 偏差平方和 s_i , $\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{M}$
STAT $(i, 4)$: 分散 v_i
STAT $(i, 5)$: 標準偏差 d_i

(c) 各標本について同数の観測値を追加した場合の基礎統計量, および, 重相関係数を求めたい場合には, 観測値を追加するまえに計算した STAT, NS, WK の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 または 3, に設定して計算を行えば良い. ただし, 分散や標準偏差を求める場合には, 前回標本分散を利用して計算した場合は引き続き標本分散を利用して計算する様に, 不偏推定値を計算した場合は引き続き不偏推定値を計算する様に, ISW の値を設定する必要がある.

(d) ISW=0 または ISW=2 にて実行したジョブで IERR=1020 で終了した場合, 続けて ISW=1 または ISW=3 にてジョブを実行しても, 結果は保証されない.

(e) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(f) 不偏推定値を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本分散を利用して計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値が以下のような行列 X で与えられたとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差), および, 重相関係数を求める.

$$X = \begin{bmatrix} 23.9 & 64.6 & 2.41 \\ 21.4 & 65.2 & 2.14 \\ 23.6 & 57.7 & 2.61 \\ 23.2 & 61.0 & 2.24 \\ 25.0 & 86.5 & 2.78 \\ 25.7 & 88.8 & 2.95 \\ 23.2 & 91.0 & 2.91 \end{bmatrix}$$

さらに以下のような行列 Y で与えられる観測値が追加されたとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差), および, 重相関係数を求める.

$$Y = \begin{bmatrix} 24.3 & 84.6 & 3.12 \\ 25.3 & 89.2 & 3.01 \\ 26.5 & 90.8 & 2.73 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

観測値を格納した行列 X, NA=100, N=7, M=3, ISW=0

2 回目の処理:

観測値を格納した行列 Y, NA=100, N=3, M=3, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2CCMA
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, M = 3 )
      DIMENSION A(NA,M),STAT(M,5),R(M),WK(2*M*M+3*M)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =  0
      ISW  =  0
      READ(5,*) N
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  110 CONTINUE
      CALL D2CCMA(A,NA,N,M,NS,STAT,R,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      DO 120 J=1,M
         WRITE(6,6050) J,(STAT(J,I),I=1,5),R(J)
  120 CONTINUE
!
      WRITE(6,6060)
      IERR = 0
      ISW  = 1
      READ(5,*) N
      DO 130 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 140 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  140 CONTINUE
      CALL D2CCMA(A,NA,N,M,NS,STAT,R,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      DO 150 J=1,M
         WRITE(6,6050) J,(STAT(J,I),I=1,5),R(J)
  150 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2CCMA ***',/,&
             /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
```

```
            /,7X,'N = ',I6,5X,'M = ',I6,/,&
            /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
            /,7X,'IERR = ',I6)
6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',I6,/,&
            /,68X,'MULTIPLE',/,&
             34X,'SUM OF',15X,'STANDARD',3X,'CORRELATION',/,&
             3X,'VARIABLE',4X,'SUM',7X,'MEAN',4X,'SQUARES',3X,&
                 'VARIANCE',3X,'DEVIATION',3X,'COEFFICIENT',/,&
             3X,74('-'))
6050 FORMAT(  ' ',I6,3F11.2,3(1X,D11.4))
6060 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
            /,3X,'** INPUT **')
     END
```

(d) 出力結果

```
 *** D2CCMA ***

   *** FIRST PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      0

       N =      7     M =      3

       OBSERVATION MATRIX

               23.90        64.60         2.41
               21.40        65.20         2.14
               23.60        57.70         2.61
               23.20        61.00         2.24
               25.00        86.50         2.78
               25.70        88.80         2.95
               23.20        91.00         2.91

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =      7

                                                                    MULTIPLE
                                  SUM OF               STANDARD   CORRELATION
   VARIABLE     SUM       MEAN    SQUARES   VARIANCE   DEVIATION   COEFFICIENT
   --------------------------------------------------------------------------
      1      166.00      23.71      11.53 0.1921D+01 0.1386D+01 0.7491D+00
      2      514.80      73.54    1263.32 0.2106D+03 0.1451D+02 0.8253D+00
      3       18.04       2.58       0.62 0.1041D+00 0.3227D+00 0.8934D+00


   *** CONTINUATION PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      1

       N =      3     M =      3

       OBSERVATION MATRIX

               24.30        84.60         3.12
               25.30        89.20         3.01
               26.50        90.80         2.73

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =     10

                                                                    MULTIPLE
                                  SUM OF               STANDARD   CORRELATION
   VARIABLE     SUM       MEAN    SQUARES   VARIANCE   DEVIATION   COEFFICIENT
   --------------------------------------------------------------------------
      1      242.10      24.21      19.69 0.2188D+01 0.1479D+01 0.6847D+00
      2      779.40      77.94    1735.18 0.1928D+03 0.1389D+02 0.8229D+00
      3       26.90       2.69       1.00 0.1114D+00 0.3338D+00 0.8159D+00
```

4.4.3 D2CCPR, R2CCPR 偏相関係数

(1) **機 能**

n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ki}\}(k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$ が与えられたとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差) , および, 偏相関係数を求める. または, 基礎統計量が分かっている m 個の標本のそれぞれに n 個の観測値 $\{y_{ki}\}$ $(k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$ を追加した場合の基礎統計量, および, 偏相関係数を求める.

なお, n 個の観測値からなる m 個の標本 $\{x_{ki}\}$ $(k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m)$ に対する基礎統計量, および, 偏相関係数は, それぞれ次式で定義される.

総和:

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}, \quad i = 1, \cdots, m$$

平均:

$$\bar{x}_i = \frac{t_i}{n}, \quad i = 1, \cdots, m$$

偏差平方和:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)^2, \quad i = 1, \cdots, m$$

分散:

$$v_i = \frac{s_i}{\alpha}, \quad i = 1, \cdots, m$$

標準偏差:

$$d_i = \sqrt{v_i}, \quad i = 1, \cdots, m$$

ここで, α は不偏推定値を用いる場合は $n - 1$, 標本分散を用いる場合は n となる.

偏相関係数:

$$r_{i,j \cdot 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots j-1, j+1, \cdots m} = -\frac{\Delta_{ij}}{\sqrt{\Delta_{ii} \Delta_{jj}}} \quad i, j = 1, \cdots, m$$

ここで, Δ_{ij} は, 相関係数 r_{ij} $(i, j = 1, \cdots, m)$ を要素とする行列の余因子行列である.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D2CCPR (A, NA, N, M, NS, STAT, R, NR, ISW, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R2CCPR (A, NA, N, M, NS, STAT, R, NR, ISW, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	NA,M	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ki}) または (y_{ki})(注意事項 (a) 参照)
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	N	I	1	入 力	配列 A に格納した標本当たりの観測値の数 n
4	M	I	1	入 力	標本の数 m
5	NS	I	1	入 力	観測値を追加する前の標本当たりの観測値の数 (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	標本当たりの観測値の数 n
6	STAT	{D/R}	M,5	入 力	観測値を追加する前の基礎統計量 (注意事項 (b) 参照) (ISW=0 または 2 の場合は初期設定不要)
				出 力	求められた基礎統計量 (注意事項 (b) 参照)
7	R	{D/R}	NR,M	出 力	各標本間における偏相関係数 $r_{i,j\cdot 1,\cdots,i-1,i+1,\cdots j-1,j+1,\cdots m}$ (注意事項 (a) 参照)
8	NR	I	1	入 力	配列 R の整合寸法
9	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏推定値を利用して計算 (既知統計量なし) 1: 不偏推定値を利用して計算 (観測値追加) 2: 標本分散を利用して計算 (既知統計量なし) 3: 標本分散を利用して計算 (観測値追加)
10	WK	{D/R}	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** 2×M×M+3×M
11	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW = 0, 1, 2, 3

(b) NA ≥ N ≥ 1

(c) NR ≥ M ≥ 1

(d) NS ≥ 1 (ISW=1 または 3 のとき)

(e) N ≥ M (ISW=0 または 2 のとき)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	N = 1 であった.	ISW=0 のとき: 分散と標準偏差, 偏相関係数に表現できる絶対値最大値を設定する. ISW=2 のとき: 偏相関係数に表現できる絶対値最大値を設定する.
1020	ある標本のすべての値が等しいため分散がゼロになった.	偏相関係数に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (b), (c) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (e) を満足しなかった.	
4000	単相関行列の逆行列が求められなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値 x_{ki} または y_{ki} $(k = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, m)$ は実行列 (2 次元配列型) データとして配列 A に格納する．また偏相関係数 $\hat{r}_{ij} = r_{i,j\cdot 1,\cdots,i-1,i+1,\cdots j-1,j+1,\cdots m}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ は実行列 (2 次元配列型) データとして配列 R に格納される．(格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(b) 基礎統計量は配列 STAT に次のように格納される．

STAT $(i, 1)$: 総和 t_i
STAT $(i, 2)$: 平均 $\bar{x}_i$
STAT $(i, 3)$: 偏差平方和 s_i ,　 $\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{M}$
STAT $(i, 4)$: 分散 v_i
STAT $(i, 5)$: 標準偏差 d_i

(c) 各標本について同数の観測値を追加した場合の基礎統計量および偏相関係数を求めたい場合には, 観測値を追加するまえに計算した STAT, NS, WK の内容をそのまま利用して, A に追加になった観測値を, N に追加になった観測値の数をそれぞれ設定し, ISW を 1 または 3, に設定して計算を行えば良い．ただし, 分散や標準偏差を求める場合には, 前回標本分散を利用して計算した場合は引き続き標本分散を利用して計算する様に, 不偏推定値を計算した場合は引き続き不偏推定値を計算する様に, ISW の値を設定する必要がある.

(d) ISW=0 または ISW=2 にて実行したジョブで IERR=1020 で終了した場合, 続けて ISW=1 または ISW=3 にてジョブを実行しても, 結果は保証されない.

(e) データ数が非常に多くてデータのばらつきが大きい場合には, 絶対値が同程度の大きさのデータごとにグループ分けして, 小さい方から標本に加えていく方が良い結果が得られる.

(f) 不偏推定値を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる．一方, 標本分散を利用して計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値が以下のような行列 X で与えられたとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差), および, 偏相関係数を求める.

$$X = \begin{bmatrix} 84 & 58 & 42 \\ 92 & 88 & 86 \\ 88 & 80 & 98 \\ 66 & 72 & 64 \\ 64 & 50 & 40 \\ 80 & 94 & 74 \\ 90 & 92 & 94 \end{bmatrix}$$

さらに以下のような行列 Y で与えられる観測値が追加されたとき, 各標本ごとに基礎統計量 (総和, 平均, 偏差平方和, 分散, 標準偏差), および, 偏相関係数を求める.

$$Y = \begin{bmatrix} 40 & 36 & 8 \\ 78 & 50 & 86 \\ 82 & 62 & 66 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

1 回目の処理:

観測値を格納した行列 X, NA=100, N=7, M=3, ISW=0

2 回目の処理:

観測値を格納した行列 Y, NA=100, N=3, M=3, ISW=1

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B2CCPR
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, M = 3, NR = 3 )
      DIMENSION A(NA,M),STAT(M,5),R(NR,M),WK(2*M*M+3*M)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      ISW  = 0
      READ(5,*) N
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  110 CONTINUE
      CALL D2CCPR(A,NA,N,M,NS,STAT,R,NR,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      DO 120 J=1,M
         WRITE(6,6050) J,(STAT(J,I),I=1,5)
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6060)
      DO 130 I=1,M
         WRITE(6,6070) (R(I,J),J=1,M)
  130 CONTINUE
!
      WRITE(6,6080)
      IERR = 0
      ISW  = 1
      READ(5,*) N
      DO 140 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  140 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,N,M
      DO 150 I=1,N
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  150 CONTINUE
      CALL D2CCPR(A,NA,N,M,NS,STAT,R,NR,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) NS
      DO 160 J=1,M
         WRITE(6,6050) J,(STAT(J,I),I=1,5)
  160 CONTINUE
      WRITE(6,6060)
      DO 170 I=1,M
```

```
          WRITE(6,6070) (R(I,J),J=1,M)
  170 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D2CCPR ***',/,&
              /,3X,'*** FIRST PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'N = ',I6,5X,'M = ',I6,/,&
              /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TOTAL SAMPLE SIZE = ',I6,/,&
              /,45X,'SUM OF',16X,'STANDARD',/,&
               8X,'VARIABLE',8X,'SUM',8X,'MEAN',5X,'SQUARES',4X,&
                  'VARIANCE',3X,'DEVIATION',/,&
               7X,70('-'))
 6050 FORMAT(  7X,I6,3X,3(1X,F11.2),2(1X,D11.4))
 6060 FORMAT( /,7X,'PARTIAL CORRELATION COEFFICIENT MATRIX',/)
 6070 FORMAT(  9X,5(1X,D15.8))
 6080 FORMAT(/,/,3X,'*** CONTINUATION PROCESSING ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D2CCPR ***

   *** FIRST PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      0

       N =      7     M =      3

       OBSERVATION MATRIX

               84.00        58.00        42.00
               92.00        88.00        86.00
               88.00        80.00        98.00
               66.00        72.00        64.00
               64.00        50.00        40.00
               80.00        94.00        74.00
               90.00        92.00        94.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =      7

                                             SUM OF                STANDARD
        VARIABLE        SUM        MEAN     SQUARES    VARIANCE   DEVIATION
       ----------------------------------------------------------------------
             1        564.00       80.57      773.71  0.1290D+03  0.1136D+02
             2        534.00       76.29     1755.43  0.2926D+03  0.1710D+02
             3        498.00       71.14     3342.86  0.5571D+03  0.2360D+02

       PARTIAL CORRELATION COEFFICIENT MATRIX

          -0.10000000D+01  0.11966857D+00  0.36608424D+00
           0.11966857D+00 -0.10000000D+01  0.74403866D+00
           0.36608424D+00  0.74403866D+00 -0.10000000D+01


   *** CONTINUATION PROCESSING ***

   ** INPUT **

       ISW =      1

       N =      3     M =      3

       OBSERVATION MATRIX

               40.00        36.00         8.00
               78.00        50.00        86.00
               82.00        62.00        66.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       TOTAL SAMPLE SIZE =     10

                                             SUM OF                STANDARD
        VARIABLE        SUM        MEAN     SQUARES    VARIANCE   DEVIATION
       ----------------------------------------------------------------------
             1        764.00       76.40     2254.40  0.2505D+03  0.1583D+02
             2        682.00       68.20     3619.60  0.4022D+03  0.2005D+02
             3        658.00       65.80     7291.60  0.8102D+03  0.2846D+02

       PARTIAL CORRELATION COEFFICIENT MATRIX

          -0.10000000D+01  0.27290340D+00  0.64287069D+00
           0.27290340D+00 -0.10000000D+01  0.37828938D+00
           0.64287069D+00  0.37828938D+00 -0.10000000D+01
```

第 5 章　時系列分析

5.1　概 要

本ライブラリでは, 時系列分析を行うための以下の機能を用意している.

- 自己共分散・相互共分散
- 自己相関・相互相関
- 平滑化・需要予測

5.1.1 解説

(1) **時系列データの基礎統計量**

時系列データを $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする. 時系列データのうち前から $n-l$ 個のデータと後ろから $n-l$ 個のデータについての平均を $\mu^{(l)}$, $\nu^{(l)}$ とする. ただし, $(l = 0, 1, \cdots, m-1; m \leq n)$.

$$\mu^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_i}{n-l} \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1)$$

$$\nu^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_{i+l}}{n-l} \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1)$$

このとき**自己共分散** $c^{(l)}$ は

$$c^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - \mu^{(l)})(x_{i+l} - \nu^{(l)})}{n-l} \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1)$$

で定義する. なお, $c^{(l)}$ は

$$c^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{j=l+1}^{n}(x_j - \nu^{(l)})(x_{j-l} - \mu^{(l)})}{n-l} \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1)$$

とも表せる. 時系列データのうち前から $n-l$ 個のデータと後ろから $n-l$ 個のデータの標本分散 (不変推定量でない) を $u^{(l)}$, $v^{(l)}$ とすると

$$u^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - \mu^{(l)})^2}{n-l} \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1)$$

$$v^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_{i+l} - \nu^{(l)})^2}{n-l} \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1)$$

自己相関係数は $r^{(l)}$ は

$$\begin{aligned} r^{(l)} &= \frac{c^{(l)}}{\sqrt{u^{(l)}v^{(l)}}} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - \mu^{(l)})(x_{i+l} - \nu^{(l)})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - \mu^{(l)})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_{i+l} - \nu^{(l)})^2}} \end{aligned}$$

で定義される. なお, 変数 l は**ラグ**と呼ばれる.

2 つの時系列データをそれぞれ,

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

とする. 時系列データのうち前から $n-l$ 個のデータと後ろから $n-l$ 個のデータについての平均を x_i, y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ それぞれに対して, ${\mu_x}^{(l)}$, ${\nu_x}^{(l)}$, ${\mu_y}^{(l)}$, ${\nu_y}^{(l)}$ とする. ただし, $(l=0,1,\cdots,m-1; m \leq n)$.

$${\mu_x}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_i}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

$${\nu_x}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_{i+l}}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

$${\mu_y}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} y_i}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

$${\nu_y}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} y_{i+l}}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

このとき**相互共分散** ${c_{xy}}^{(l)}$, ${c_{yx}}^{(l)}$ はそれぞれ

$${c_{xy}}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - {\mu_x}^{(l)})(y_{i+l} - {\nu_y}^{(l)})}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

$${c_{yx}}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(y_i - {\mu_y}^{(l)})(x_{i+l} - {\nu_x}^{(l)})}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

で定義する. 時系列データのうち前から $n-l$ 個のデータと後ろから $n-l$ 個のデータの標本分散 (不変推定量でない) を x_i, y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ それぞれに対して ${u_x}^{(l)}$, ${v_x}^{(l)}$, ${u_y}^{(l)}$, ${v_y}^{(l)}$ とすると

$${u_x}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - {\mu_x}^{(l)})^2}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

$${v_x}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_{i+l} - {\nu_x}^{(l)})^2}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

$${u_y}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(y_i - {\mu_y}^{(l)})^2}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

$${v_y}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(y_{i+l} - {\nu_y}^{(l)})^2}{n-l} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$$

相互相関係数は ${r_{xy}}^{(l)}$, ${r_{yx}}^{(l)}$ は

$$\begin{aligned}
{r_{xy}}^{(l)} &= \frac{{c_{xy}}^{(l)}}{\sqrt{{u_x}^{(l)}{v_y}^{(l)}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - {\mu_x}^{(l)})(y_{i+l} - {\nu_y}^{(l)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - {\mu_x}^{(l)})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-l}(y_{i+l} - {\nu_y}^{(l)})^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{r_{yx}}^{(l)} &= \frac{{c_{yx}}^{(l)}}{\sqrt{{u_y}^{(l)}{v_x}^{(l)}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-l}(y_i - {\mu_y}^{(l)})(x_{i+l} - {\nu_x}^{(l)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-l}(y_i - {\mu_y}^{(l)})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-l}(x_{i+l} - {\nu_x}^{(l)})^2}}
\end{aligned}$$

で定義される.

(2) **平滑化・需要予測**

(a) 移動平均

与えられた n 個の時系列データを

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

指定された重みを

$$w_1, w_2, \cdots, w_m$$

とすれば, 重みつき移動平均 M_k^w は

$$M_k^w = \sum_{j=1}^{m} \frac{(x_{k+j-1} \cdot w_j)}{\sum_{j=1}^{m} w_j} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n - m + 1)$$

と定義される. m は平滑化の帯域幅とよばれることもある. 通常重み係数 w_j は

$$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$$

を満たす様に定める.

(b) 単純指数平滑

与えられた時系列 $\cdots, x_{n-1}, x_n (x_n$ は最も現在に近いデータ) に対して単純指数平滑式はつぎのように与えられる.

$$S_t = \alpha x_t + (1 - \alpha) S_{t-1} \quad (t = M, M+1, \cdots, n; M \to -\infty)$$

ここで S_t は x_t の平滑値であり, α は平滑定数である. いま, 推定モデルは次のような構造を持つとする.

$$x_t = a + \varepsilon_t$$

ここで, a は定数, ε_t は $N(0, \sigma^2)$ に互いに独立に従う誤差項である. このとき, t 時点での期待値, E_t および, t 時より L 期先の予測値, E_{t+L} は以下のようになる.

$$E_{t+L} = E_t = S_t$$

(c) 2 重指数平滑

与えられた時系列 $\cdots, x_{n-1}, x_n(x_n$ は最も現在に近いデータ) に対して 2 重指数平滑式はつぎのように与えられる.

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

$$D_t = \alpha S_t + (1-\alpha)D_{t-1} \quad (t = M, M+1, \cdots, n; M \to -\infty)$$

ここで S_t は x_t の単純指数平滑値であり, D_t は x_t の 2 重指数平滑値, α は平滑定数である. いま, 推定モデルは次のような構造を持つとする.

$$x_t = a + bt + \varepsilon_t$$

ここで, a と b は定数, ε_t は $N(0, \sigma^2)$ に互いに独立に従う誤差項である. このとき, t 時点での期待値, E_t および, t 時より L 期先の予測値, E_{t+L} は以下のようになる.

$$E_t = a + bt$$

$$S_t = a + bt - \frac{1-\alpha}{\alpha}b = E_t - \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot b$$

$$D_t = a + bt - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}b = E_t - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \cdot b$$

従って

$$E_t = 2S_t - D_t$$

$$b = B_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t - D_t)$$

また

$$E_{t+L} = (2S_t - D_t) + B_t L$$

ここで B_t は **1 次傾向推定値**と呼ばれる.

(d) 3 重指数平滑

与えられた時系列 $\cdots, x_{n-1}, x_n(x_n$ は最も現在に近いデータ) に対して 3 重指数平滑式はつぎのように与えられる.

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

$$D_t = \alpha S_t + (1-\alpha)D_{t-1}$$

$$T_t = \alpha D_t + (1-\alpha)T_{t-1} \quad (t = M, M+1, \cdots, n; M \to -\infty)$$

ここで S_t は x_t の単純指数平滑値であり, D_t は x_t の 2 重指数平滑値, T_t は x_t の 3 重指数平滑値, α は平滑定数である. いま, 推定モデルは次のような構造を持つとする.

$$x_t = a + bt + \frac{c}{2}t^2 + \varepsilon_t$$

ここで, a, b, c は定数, ε_t は $N(0, \sigma^2)$ に互いに独立に従う誤差項である. このとき, t 時点での期待値, E_t および, t 時より L 期先の予測値, E_{t+L} は以下のようになる.

$$E_t = a + bt + \frac{c}{2}t^2$$

$$S_t = a + bt + \frac{c}{2}t^2 - (b+ct)\frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{c}{2} \cdot \frac{(1-\alpha)(1+(1-\alpha))}{\alpha^2}$$

$$D_t = a + bt + \frac{c}{2}t^2 - (b+ct)\frac{2(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{c}{2} \cdot \frac{(1-\alpha)(2+2(1-\alpha))}{\alpha^2}$$

$$T_t = a + bt + \frac{c}{2}t^2 - (b+ct)\frac{3(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{c}{2}\cdot\frac{(1-\alpha)(3+3(1-\alpha))}{\alpha^2}$$

従って

$$E_t = 3S_t - 3D_t + T_t$$

$$b = B_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\{(6-5\alpha)S_t - 2(5-4\alpha)D_t + (4-3\alpha)T_t\}$$

$$c = C_t = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}(S_t - 2D_t + T_t)$$

また

$$E_{t+L} = E_t + B_tL + \frac{C_t}{2}L^2$$

ここで B_t は **1 次傾向推定値**, C_t は **2 次傾向推定値**とそれぞれ呼ばれる.

5.1.2 参考文献

(1) 北川源四郎, “FORTRAN77 時系列解析プログラミング”, 岩波書店 (1993)

(2) 春日井博, “需要予測入門”, 日刊工業新聞社

5.2 自己共分散・相互共分散

5.2.1 DFCVSC, RFCVSC 自己共分散

(1) **機 能**

時系列データを $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする. 時系列データのうち前から $n-l$ $(l = 1, 2, \cdots, m; m \leq n)$ 個のデータについて次式で定義される総和, 平均, 偏差平方和, 標準偏差 (不偏推定値) を求める.

総和:

$$s^{(l)} = \sum_{i=1}^{n-l} x_i \quad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

平均:

$$\mu^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_i}{n-l} \quad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

偏差平方和:

$$v^{(l)} = \sum_{i=1}^{n-l} (x_i - \mu^{(l)})^2 \quad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

標準偏差 (不偏推定値):

$$\sigma^{(l)} = \sqrt{\frac{v^{(l)}}{n-l-1}}$$

また, 次式で定義される自己共分散を求める.

$$c^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} (x_i - \mu^{(l)})(x_{i+l} - \nu^{(l)})}{n-l} \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1)$$

ここで $\nu^{(l)}$ は後ろから $n-l$ 個のデータについての平均

$$\nu^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_{i+l}}{n-l} \quad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFCVSC (A, N, M, V, STAT, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFCVSC (A, N, M, V, STAT, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D / R}	N	入 力	時系列データ x_i
2	N	I	1	入 力	時系列データの数 n
3	M	I	1	入 力	求める自己共分散の数 m
4	V	{D / R}	M	出 力	自己共分散 $c^{(l)}$
5	STAT	{D / R}	M,4	出 力	基礎統計量 (注意事項 (a) 参照)
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $\mathrm{N} \geq 2$

(b) $0 < \mathrm{M} \leq \mathrm{N}$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) または (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) 注意事項

(a) 配列 STAT には, 時系列データの総和 $s^{(l)}$, 平均 $\mu^{(l)}$, 偏差平方和 $v^{(l)}$, 標準偏差 $\sigma^{(l)}$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ が実行列 (2 次元配列型) として次のように出力される. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} s^{(1)} & \mu^{(1)} & v^{(1)} & \sigma^{(1)} \\ s^{(2)} & \mu^{(2)} & v^{(2)} & \sigma^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{(m)} & \mu^{(m)} & v^{(m)} & \sigma^{(m)} \end{bmatrix}$$

(7) 使用例

(a) 問 題
時系列データ A

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}(1) = 48.1\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(13) = 26.1\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(2) = 54.7\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(14) = 22.3\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(3) = 58.0\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(15) = 24.1\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(4) = 64.2\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(16) = 33.1\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(5) = 56.1\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(17) = 42.3\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(6) = 44.9\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(18) = 52.5\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(7) = 36.1\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(19) = 36.0\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(8) = 34.2\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(20) = 23.5\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(9) = 50.1\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(21) = 14.9\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(10) = 54.9\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(22) = 19.8\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(11) = 55.1\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(23) = 25.0\mathrm{D0}\\
&\mathrm{A}(12) = 48.4\mathrm{D0}, \quad \mathrm{A}(24) = 35.4\mathrm{D0}
\end{aligned}
$$

が与えられているとき, 自己共分散を求める.

(b) 入力データ

時系列データ A, N=24, 求める自己共分散の数 M=14

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM NFCVSC
      PARAMETER (NMAX=24,MMAX=14)
      REAL(8) A(NMAX),STAT(MMAX,4),V(MMAX)
!
      N=24
      M=14
!
      READ(*,*) (A(I),I=1,N)
!
      CALL DFCVSC(A,N,M,V,STAT,IERR)
!
      WRITE(6,110) N,M
      WRITE(6,120) (A(I),I=1,N)
      WRITE(6,130) IERR
      WRITE(6,140) (I,STAT(I,1),STAT(I,2)&
                   ,STAT(I,3),STAT(I,4),V(I),I=1,M)
!
  110 FORMAT(' ',/,6X,'*** AUTOCOVARIANCE (DFCVSC))',&
          ' ***',/,/,6X,'INPUT DATA',6X,'N =',I4,5X,'M =',I4,/)
  120 FORMAT(6X,6F10.3)
  130 FORMAT(6X,'OUTPUT',/,/,6X,'IERR=',I4,/,/,6X,'NO.',1X,'STAT(I,1)',&
         1X,'STAT(I,2)',1X,'STAT(I,3)',1X,'STAT(I,4)',9X,'R',/)
  140 FORMAT(6X,I3,5F10.3)
!
      END
```

(d) 出力結果

```
*** AUTOCOVARIANCE (DFCVSC)) ***

INPUT DATA      N =  24     M =  14

    48.100    54.700    58.000    64.200    56.100    44.900
    36.100    34.200    50.100    54.900    55.100    48.400
    26.100    22.300    24.100    33.100    42.300    52.500
    36.000    23.500    14.900    19.800    25.000    35.400
OUTPUT

IERR=   0

NO. STAT(I,1) STAT(I,2) STAT(I,3) STAT(I,4)         R

  1   959.800    39.992  4686.918    14.275  4686.918
  2   924.400    40.191  4664.918    14.562  3579.078
  3   899.400    40.882  4423.653    14.514  1540.272
  4   879.600    41.886  3958.046    14.068  -232.746
  5   864.700    43.235  3193.405    12.964  -621.458
  6   841.200    44.274  2783.437    12.435   448.051
  7   805.200    44.733  2711.180    12.629  1945.133
  8   752.700    44.276  2647.311    12.863  2522.894
  9   710.400    44.400  2643.160    13.274  1891.180
 10   677.300    45.153  2506.957    13.382   480.529
 11   653.200    46.657  2032.054    12.502  -673.340
 12   630.900    48.531  1393.148    10.775  -878.072
 13   604.800    50.400   848.080     8.781  -136.010
 14   556.400    50.582   843.716     9.185   624.600
```

5.2.2 DFCVCS, RFCVCS
相互共分散

(1) **機 能**

2 つの時系列データをそれぞれ,

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

とする. 次式で定義される相互共分散 ${c_{xy}}^{(l)}$, ${c_{yx}}^{(l)}$ $(l = 1, 2, \cdots, m; m \le n)$ を求める.

$$ {c_{xy}}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - {\mu_x}^{(l)})(y_{i+l} - {\nu_y}^{(l)})}{n-l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m) $$

$$ {c_{yx}}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(y_i - {\mu_y}^{(l)})(x_{i+l} - {\nu_x}^{(l)})}{n-l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m) $$

ただし, ${\mu_x}^{(l)}$, ${\nu_x}^{(l)}$, ${\mu_y}^{(l)}$, ${\nu_y}^{(l)}$ は, x_i, y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ それぞれに対する, 時系列データのうち前から $n-l$ 個のデータと後ろから $n-l$ 個のデータの平均であり次式で定義される. ただし, $(l = 1, 2, \cdots, m; m \le n)$.

$$ {\mu_x}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_i}{n-l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m) $$

$$ {\nu_x}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_{i+l}}{n-l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m) $$

$$ {\mu_y}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} y_i}{n-l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m) $$

$$ {\nu_y}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} y_{i+l}}{n-l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m) $$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFCVCS (X, N, Y, M, VX, VY, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFCVCS (X, N, Y, M, VX, VY, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　{ 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	X	{D / R}	N	入 力	時系列データ x_i
2	N	I	1	入 力	時系列データの数 n
3	Y	{D / R}	N	入 力	時系列データ y_i
4	M	I	1	入 力	求める相互共分散の数 m
5	VX	{D / R}	M	出 力	相互共分散 ${c_{xy}}^{(l)}$
6	VY	{D / R}	M	出 力	相互共分散 ${c_{yx}}^{(l)}$
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $\mathrm{N} \geq 2$

(b) $0 < \mathrm{M} \leq \mathrm{N}$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) または (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) 注意事項

なし

(7) 使用例

(a) 問 題

二つの時系列データ X, Y

$$
\begin{aligned}
X(1) &= 2.05D0, & Y(1) &= 22.23D0\\
X(2) &= 2.10D0, & Y(2) &= 22.34D0\\
X(3) &= 3.40D0, & Y(3) &= 22.30D0\\
X(4) &= 5.01D0, & Y(4) &= 21.90D0\\
X(5) &= 7.35D0, & Y(5) &= 21.31D0\\
X(6) &= 9.43D0, & Y(6) &= 20.41D0\\
X(7) &= 10.82D0, & Y(7) &= 19.43D0\\
X(8) &= 11.09D0, & Y(8) &= 18.41D0\\
X(9) &= 10.41D0, & Y(9) &= 17.72D0\\
X(10) &= 7.85D0, & Y(10) &= 17.81D0\\
X(11) &= 3.97D0, & Y(11) &= 18.01D0\\
X(12) &= 2.90D0, & Y(12) &= 18.72D0\\
X(13) &= 2.85D0, & Y(13) &= 19.51D0\\
X(14) &= 3.50D0, & Y(14) &= 20.39D0\\
X(15) &= 4.97D0, & Y(15) &= 21.54D0\\
X(16) &= 6.77D0, & Y(16) &= 22.33D0\\
X(17) &= 9.61D0, & Y(17) &= 22.35D0\\
X(18) &= 11.91D0, & Y(18) &= 21.69D0\\
X(19) &= 12.81D0, & Y(19) &= 19.97D0\\
X(20) &= 10.92D0, & Y(20) &= 19.02D0\\
X(21) &= 9.30D0, & Y(21) &= 18.73D0\\
X(22) &= 6.13D0, & Y(22) &= 18.91D0\\
X(23) &= 4.54D0, & Y(23) &= 19.34D0\\
X(24) &= 4.72D0, & Y(24) &= 19.94D0
\end{aligned}
$$

が与えられているとき, 相互共分散を求める.

(b) 入力データ

時系列データ X と Y, N=24, 求める相互共分散の数 M=14

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM NFCVCS
!
      REAL(8) X(24),Y(24),VX(14),VY(14)
!
      N=24
      M=14
!
      READ(*,*) (X(I),I=1,N)
      READ(*,*) (Y(I),I=1,N)
!
      CALL DFCVCS(X,N,Y,M,VX,VY,IERR)
!
      WRITE(6,110) N,M
      WRITE(6,120) (X(I),Y(I),I=1,N)
      WRITE(6,130) IERR
      WRITE(6,140) (I,VX(I),VY(I),I=1,M)
!
  110 FORMAT(' ',/,/,/,6X,'*** CROSS COVARIANCE (DFCVCS) ***',/,/,&
           6X,'INPUT DATA',/,/,6X,'N =',I4,5X,'M =',I4,/,/,&
           15X,'DATA-X',9X,'DATA-Y',/)
  120 FORMAT(6X,2F15.3)
  130 FORMAT(6X,'OUTPUT',/,/,6X,'IERR=',I3,/,/,&
           6X,'NO.',15X,'VX',13X,'VY',/)
  140 FORMAT(6X,I3,2X,2F15.3)
!
      END
```

(d) 出力結果

```
      *** CROSS COVARIANCE (DFCVCS) ***

      INPUT DATA

      N =  24     M =  14
```

```
          DATA-X          DATA-Y

           2.050          22.230
           2.100          22.340
           3.400          22.300
           5.010          21.900
           7.350          21.310
           9.430          20.410
          10.820          19.430
          11.090          18.410
          10.410          17.720
           7.850          17.810
           3.970          18.010
           2.900          18.720
           2.850          19.510
           3.500          20.390
           4.970          21.540
           6.770          22.330
           9.610          22.350
          11.910          21.690
          12.810          19.970
          10.920          19.020
           9.300          18.730
           6.130          18.910
           4.540          19.340
           4.720          19.940
OUTPUT

IERR=  0

NO.               VX              VY

  1          -32.295         -32.295
  2          -72.567          22.571
  3          -93.644          66.354
  4          -89.968          86.105
  5          -65.973          78.128
  6          -27.864          48.649
  7           13.207           9.811
  8           47.778         -26.477
  9           67.510         -54.681
 10           67.428         -70.349
 11           50.022         -69.464
 12           21.173         -50.006
 13           -9.509         -22.386
 14          -33.709           5.315
```

5.3 自己相関・相互相関

5.3.1 DFCRSC, RFCRSC 自己相関係数

(1) **機 能**

時系列データを $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする. 時系列データのうち前から $n-l$ $(l = 1, 2, \cdots, m; m \leq n)$ 個のデータについて次式で定義される総和, 平均, 偏差平方和, 標準偏差 (不偏推定値) を求める.

総和:

$$s^{(l)} = \sum_{i=1}^{n-l} x_i \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

平均:

$$\mu^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_i}{n-l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

偏差平方和:

$$v^{(l)} = \sum_{i=1}^{n-l} (x_i - \mu^{(l)})^2 \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

標準偏差 (不偏推定値):

$$\sigma^{(l)} = \sqrt{\frac{v^{(l)}}{n-l-1}}$$

また, 次式で定義される自己相関係数を求める.

$$r^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} (x_i - \mu^{(l)})(x_{i+l} - \nu^{(l)})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} (x_i - \mu^{(l)})^2} \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} (x_{i+l} - \nu^{(l)})^2}}$$

ここで $\nu^{(l)}$ は後ろから $n-l$ 個のデータについての平均

$$\nu^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_{i+l}}{n-l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFCRSC (A, N, M, R, STAT, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFCRSC (A, N, M, R, STAT, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	A	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\ \text{R}\end{Bmatrix}$	N	入 力	時系列データ x_i
2	N	I	1	入 力	時系列データの数 n
3	M	I	1	入 力	求める自己相関係数の数 m
4	R	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\ \text{R}\end{Bmatrix}$	M	出 力	自己相関係数 $r^{(l)}$
5	STAT	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\ \text{R}\end{Bmatrix}$	M,4	出 力	基礎統計量 (注意事項 (a) 参照)
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $\text{N} \geq 2$

(b) $1 \leq \text{M} \leq \text{N}$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意味	処理内容
0	正常終了.	
1000	ある l について標準偏差 $\sigma^{(l)}$ または相関係数 $r^{(l)}$ が求められなかった.	$\sigma^{(l)}$ または $r^{(l)}$ に対応する部分に 0.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) 注意事項

(a) 配列 STAT には, 時系列データの総和 $s^{(l)}$, 平均 $\mu^{(l)}$, 偏差平方和 $v^{(l)}$, 標準偏差 $\sigma^{(l)}$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ が実行列 (2 次元配列型) として次のように出力される. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} s^{(1)} & \mu^{(1)} & v^{(1)} & \sigma^{(1)} \\ s^{(2)} & \mu^{(2)} & v^{(2)} & \sigma^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{(m)} & \mu^{(m)} & v^{(m)} & \sigma^{(m)} \end{bmatrix}$$

(b) IERR=1000 の場合は, 総和 $s^{(l)}$, 平均 $\mu^{(l)}$, 偏差平方和 $v^{(l)}$ は求まっている. 標準偏差 $\sigma^{(l)}$ または相関係数 $r^{(l)}$ が求まらないところには 0.0 がセットされる $(l = 1, 2, \cdots, m)$.

5.3.2 DFCRCZ, RFCRCZ 相互相関係数 (平均 0)

(1) **機 能**

平均が 0 の 2 つの時系列データ

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

が与えられた場合に, 次式で定義される相互相関係数の近似値 ${r_{xy}}^{(l)}$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ を求める.

$$ {r_{xy}}^{(l)} = \frac{n}{n-l} \frac{\sum_{i=1}^{n-l} x_i y_{i+l}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2}} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m; n >> m) $$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFCRCZ (X, N, Y, M, CRR, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFCRCZ (X, N, Y, M, CRR, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4)
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　 { 64 ビット整数版では INTEGER(8)

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	X	{D, R}	N	入 力	時系列データ x_i
2	N	I	1	入 力	観測値の数 n
3	Y	{D, R}	N	入 力	時系列データ y_i
4	M	I	1	入 力	求める相互相関係数の数 m
5	CRR	{D, R}	M	出 力	相互相関係数の近似値 ${r_{xy}}^{(l)}$
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $1 \leq \mathrm{M} \leq \mathrm{N}$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	x_i の平方和または y_i の平方和が誤差判定のための単位より小さくなった.	すべての l について ${r_{xy}}^{(l)} = 0.0$ とする.
1100	ある l について相互相関係数 ${r_{xy}}^{(l)}$ が 1 より大きくなった.	処理を続ける.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 平均が 0 でない時系列データに対しては, 5.3.3 $\left\{\begin{matrix}\text{DFCRCS}\\\text{RFCRCS}\end{matrix}\right\}$ を使用しなければならない.

(b) IERR=1100 の場合でも相関係数 ${r_{xy}}^{(l)}$ はすべて計算されるが, その値が 1 以上のものは相関係数の定義を満たさないので相関係数として採用できない.

5.3.3 DFCRCS, RFCRCS 相互相関係数

(1) **機 能**

2 つの時系列データをそれぞれ,

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

とする. 次式で定義される相互相関係数 $r_{xy}{}^{(l)}$, $r_{yx}{}^{(l)}$ $(l = 1, 2, \cdots, m; m \leq n)$ を求める.

$$r_{xy}{}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - \mu_x{}^{(l)})(y_{i+l} - \nu_y{}^{(l)})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_i - \mu_x{}^{(l)})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(y_{i+l} - \nu_y{}^{(l)})^2}} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

$$r_{yx}{}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(y_i - \mu_y{}^{(l)})(x_{i+l} - \nu_x{}^{(l)})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(y_i - \mu_y{}^{(l)})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l}(x_{i+l} - \nu_x{}^{(l)})^2}} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

ただし, $\mu_x{}^{(l)}$, $\nu_x{}^{(l)}$, $\mu_y{}^{(l)}$, $\nu_y{}^{(l)}$ は, x_i, y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ それぞれに対する, 時系列データのうち前から $n - l$ 個のデータと後ろから $n - l$ 個のデータの平均であり次式で定義される. ただし, $(l = 1, 2, \cdots, m; m \leq n)$.

$$\mu_x{}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_i}{n - l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\nu_x{}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} x_{i+l}}{n - l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\mu_y{}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} y_i}{n - l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\nu_y{}^{(l)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-l} y_{i+l}}{n - l} \qquad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFCRCS (X, N, Y, M, RX, RY, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFCRCS (X, N, Y, M, RX, RY, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: {32 ビット整数版では INTEGER(4), 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	X	{D, R}	N	入 力	時系列データ x_i
2	N	I	1	入 力	時系列データの観測値数 n
3	Y	{D, R}	N	入 力	時系列データ y_i
4	M	I	1	入 力	求める相互相関係数の数 m
5	RX	{D, R}	M	出 力	相互相関係数 ${r_{xy}}^{(l)}$
6	RY	{D, R}	M	出 力	相互相関係数 ${r_{yx}}^{(l)}$
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N $\geq$ 2

(b) 1 $\leq$ M $\leq$ N

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	ある l に対して相関係数 ${r_{xy}}^{(l)}$ または ${r_{yx}}^{(l)}$ を求められなかった.	求められない相関係数の値に 0.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

5.4 平滑化・需要予測

5.4.1 DFASMA, RFASMA
移動平均

(1) **機 能**

与えられた n 個の時系列データと

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

m 個の指定された重み

$$w_1, w_2, \cdots, w_m$$

を用いて重みつき移動平均 M_k^w を求める．重みつき移動平均 M_k^w は

$$M_k^w = \sum_{j=1}^{m} \frac{(x_{k+j-1} \cdot w_j)}{\sum_{j=1}^{m} w_j} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-m+1)$$

と定義される．m は平滑化の帯域幅とよばれることもある．

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFASMA (A, N, M, WA, AV, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFASMA (A, N, M, WA, AV, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	{D, R}	N	入 力	時系列データ x_i
2	N	I	1	入 力	時系列データの数 n
3	M	I	1	入 力	平滑化の帯域幅 m
4	WA	{D, R}	M	入 力	重み w_j
5	AV	{D, R}	N − M + 1	出 力	移動平均 M_k^w
6	ISW	I	1	入 力	重み指定スイッチ ISW=0 :重み w_j を入力 ISW=1 :全ての重みを 1.0 に設定
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{N} \geq 2$

(b) $0 < \mathrm{M} \leq \mathrm{N}$

(c) $\mathrm{WA}(1) + \cdots + \mathrm{WA}(\mathrm{M}) > 0$

(d) ISW=0 または ISW=1

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (d) を満足しなかった.	全ての重みを 1.0 として処理を続ける.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**
なし

(7) **使用例**

(a) 問 題
時系列データ

A(1) =	71.8	A(13) =	62.3
A(2) =	73.2	A(14) =	51.2
A(3) =	63.8	A(15) =	48.2
A(4) =	60.0	A(16) =	29.8
A(5) =	58.3	A(17) =	34.3
A(6) =	57.2	A(18) =	24.0
A(7) =	48.5	A(19) =	22.9
A(8) =	53.5	A(20) =	31.8
A(9) =	69.3	A(21) =	70.0
A(10) =	68.7	A(22) =	106.7
A(11) =	73.4	A(23) =	138.5
A(12) =	74.9	A(24) =	146.1

に対して, 重み

WA(1) = -3.0
WA(2) = 12.0
WA(3) = 17.0
WA(4) = 12.0
WA(5) = -3.0

を付けた移動平均値を求める.

(b) 入力データ
配列 A, 配列 WA, N=24, M=5, ISW=0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM BFASMA
! *** EXAMPLE OF DFASMA ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER(N=24,M=5,ISW=0)
      DIMENSION A(N),WA(M),AV(N-M+1)
!
      READ(5,*) (A(I),I=1,N)
      READ(5,*) (WA(I),I=1,M)
      WRITE(6,1000) N,M,ISW
      WRITE(6,2000)
      DO 10 I=1,N
        WRITE(6,2100) I,A(I)
   10 CONTINUE
      WRITE(6,3000)
      DO 20 I=1,M
        WRITE(6,3100) I,WA(I)
   20 CONTINUE
      CALL DFASMA(A,N,M,WA,AV,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      DO 30 I=1,N-M+1
        WRITE(6,5000) I,AV(I)
   30 CONTINUE
      STOP
!
 1000 FORMAT(1X,' *** DFASMA ***',/,/,'    ** INPUT **',/,/,7X,'N   = ',I4,&
            /,7X,'M   = ',I4,/,7X,'ISW = ',I4)
 2000 FORMAT(1X,/,7X,'TIME SERIES DATA',/)
 2100 FORMAT(8X,'A(',I2,')  = ',D18.10)
 3000 FORMAT(1X,/,7X,'WEIGHT',/)
 3100 FORMAT(8X,'WA(',I2,') = ',D18.10)
 4000 FORMAT(1X,/,1X,'  ** OUTPUT **',/,/,7X,'IERR = ',I4,/)
 5000 FORMAT(7X,'AV(',I2,') = ',D18.10)
!
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** DFASMA ***

  ** INPUT **

      N   =   24
      M   =    5
      ISW =    0

      TIME SERIES DATA

       A( 1)  =   0.7180000000D+02
       A( 2)  =   0.7320000000D+02
       A( 3)  =   0.6380000000D+02
       A( 4)  =   0.6000000000D+02
       A( 5)  =   0.5830000000D+02
       A( 6)  =   0.5720000000D+02
       A( 7)  =   0.4850000000D+02
       A( 8)  =   0.5350000000D+02
       A( 9)  =   0.6930000000D+02
       A(10)  =   0.6870000000D+02
       A(11)  =   0.7340000000D+02
       A(12)  =   0.7490000000D+02
       A(13)  =   0.6230000000D+02
       A(14)  =   0.5120000000D+02
       A(15)  =   0.4820000000D+02
       A(16)  =   0.2980000000D+02
       A(17)  =   0.3430000000D+02
       A(18)  =   0.2400000000D+02
       A(19)  =   0.2290000000D+02
       A(20)  =   0.3180000000D+02
       A(21)  =   0.7000000000D+02
       A(22)  =   0.1067000000D+03
       A(23)  =   0.1385000000D+03
       A(24)  =   0.1461000000D+03

      WEIGHT

       WA( 1) =  -0.3000000000D+01
       WA( 2) =   0.1200000000D+02
       WA( 3) =   0.1700000000D+02
       WA( 4) =   0.1200000000D+02
       WA( 5) =  -0.3000000000D+01

  ** OUTPUT **

      IERR =    0

      AV( 1) =   0.6550571429D+02
      AV( 2) =   0.5982857143D+02
      AV( 3) =   0.5887428571D+02
      AV( 4) =   0.5467142857D+02
      AV( 5) =   0.5057428571D+02
      AV( 6) =   0.5558285714D+02
      AV( 7) =   0.6510857143D+02
      AV( 8) =   0.7128857143D+02
      AV( 9) =   0.7360571429D+02
      AV(10) =   0.7262857143D+02
      AV(11) =   0.6307142857D+02
      AV(12) =   0.5378000000D+02
      AV(13) =   0.4290285714D+02
      AV(14) =   0.3631428571D+02
```

```
AV(15) =    0.2901142857D+02
AV(16) =    0.2598857143D+02
AV(17) =    0.2131428571D+02
AV(18) =    0.3609428571D+02
AV(19) =    0.6765142857D+02
AV(20) =    0.1080628571D+03
```

5.4.2 DFDPES, RFDPES 単純指数平滑

(1) **機 能**

与えられた時系列 $\cdots, x_{n-1}, x_n$(x_n は最も現在に近いデータ) に対して単純指数平滑式はつぎのように与えられる.

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1} \qquad (t = M, M+1, \cdots, n; M \to -\infty)$$

ここで S_t は x_t の平滑値であり, α は平滑定数である. いま, 推定モデルは次のような構造を持つとする.

$$x_t = a + \varepsilon_t$$

ここで, a は定数, ε_t は $N(0, \sigma^2)$ に互いに独立に従う誤差項である. このとき, t 時点での期待値, E_t および, t 時より L 期先の予測値, E_{t+L} は以下のようになる.

$$E_{t+L} = E_t = S_t$$

ここでは, 与えられた時系列データ

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

(x_n は最も現在に近いデータ) に関する平滑値 S_j を求める. S_j の定義はつぎのとおり.

$$S_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \text{ (初期値)}$$

$$S_j = \alpha x_{j+m-1} + (1-\alpha)S_{j-1} \qquad (j = 2, 3, \cdots, n-m+1)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFDPES (A, N, ALH, IN, EV, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFDPES (A, N, ALH, IN, EV, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	A	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N	入 力	時系列データ x_j
2	N	I	1	入 力	時系列データの個数 n
3	ALH	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	1	入 力	平滑定数 α
4	IN	I	1	入 力	初期値設定のための平均項数 m 既定値:2 (IN=0 のとき)
5	EV	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N − IN + 1	出 力	平滑値 S_j
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $N > 0$

(b) $0 \leq IN \leq N$

(c) $0.0 < ALH < 1.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	$N = IN$. ただし, $N \neq 0$	EV(1) のみ計算される.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3200	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

5.4.3 DFDPED, RFDPED 2 重指数平滑

(1) **機 能**

与えられた時系列 $\cdots, x_{n-1}, x_n$(x_n は最も現在に近いデータ) に対して 2 重指数平滑式はつぎのように与えられる.

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

$$D_t = \alpha S_t + (1-\alpha)D_{t-1} \quad (t = M, M+1, \cdots, n; M \to -\infty)$$

ここで S_t は x_t の単純指数平滑値であり, D_t は x_t の 2 重指数平滑値, α は平滑定数である. いま, 推定モデルは次のような構造を持つとする.

$$x_t = a + bt + \varepsilon_t$$

ここで, a と b は定数, ε_t は $N(0, \sigma^2)$ に互いに独立に従う誤差項である. このとき, t 時点での期待値, E_t および, t 時より L 期先の予測値, E_{t+L} は以下のようになる.

$$E_t = 2S_t - D_t$$

$$E_{t+L} = (2S_t - D_t) + B_t \cdot L$$

ここで B_t は 1 次傾向推定値を表し, 次式で定義される.

$$B_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t - D_t)$$

ここでは, 与えられた時系列データ

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

(x_n は最も現在に近いデータ) に関する平滑値 E_k, 予測値 E_{k+L}, 1 次傾向推定値 B_k を求める. 各量の定義はつぎのとおり.

$$S_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \text{ (初期値)}$$

$$D_1 = S_1 \text{ (初期値)}$$

$$S_j = \alpha x_{j+m-1} + (1-\alpha)S_{j-1}$$

$$D_j = \alpha S_j + (1-\alpha)D_{j-1} \quad (j = 2, 3, \cdots, n-m+1)$$

$$E_k = 2S_k - D_k$$

$$B_k = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_k - D_k)$$

$$E_{k+L} = E_k + B_k L \quad (k = 1, 2, \cdots, n-m+1)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFDPED (A, N, ALH, IN, M, EV, AV, TR, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFDPED (A, N, ALH, IN, M, EV, AV, TR, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N	入 力	時系列データ x_j
2	N	I	1	入 力	時系列データの個数 n
3	ALH	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	1	入 力	平滑定数 α
4	IN	I	1	入 力	初期値設定のための平均項数 m 既定値:2 (IN=0 のとき)
5	M	I	1	入 力	タイムラグ L
6	EV	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N − IN + 1	出 力	平滑値 E_k
7	AV	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N − IN + 1	出 力	予測値 E_{k+L}
8	TR	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N − IN + 1	出 力	1 次傾向推定値 B_k
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $N > 0$

(b) $0 \leq IN \leq N$

(c) $0.0 < ALH < 1.0$

(d) $M \geq 0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	N = IN	EV(1), AV(1) が計算され, TR(1) には 0.0 がセットされる.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3200	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3300	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) この構造模型をもつと推定されるモデルの場合には最低 2 つ以上のデータが必要である. 1 点のデータで推定を行う統計的意味は存在しない.

5.4.4 DFDPET, RFDPET
3 重指数平滑

(1) **機 能**

与えられた時系列 $\cdots, x_{n-1}, x_n$(x_n は最も現在に近いデータ) に対して 3 重指数平滑式はつぎのように与えられる.

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

$$D_t = \alpha S_t + (1-\alpha)D_{t-1}$$

$$T_t = \alpha D_t + (1-\alpha)T_{t-1} \qquad (t = M, M+1, \cdots, n; M \to -\infty)$$

ここで S_t は x_t の単純指数平滑値であり, D_t は x_t の 2 重指数平滑値, T_t は x_t の 3 重指数平滑値, α は平滑定数である. いま, 推定モデルは次のような構造を持つとする.

$$x_t = a + bt + \frac{c}{2}t^2 + \varepsilon_t$$

ここで, a, b, c は定数, ε_t は $N(0, \sigma^2)$ に互いに独立に従う誤差項である. このとき, t 時点での期待値, E_t および, t 時より L 期先の予測値, E_{t+L} は以下のようになる.

$$E_t = 3S_t - 3D_t + T_t$$

$$E_{t+L} = E_t + B_t L + \frac{C_t}{2}L^2$$

ここで B_t は 1 次傾向推定値を, C_t は 2 次傾向推定値をそれぞれ表し, 次式で定義される.

$$B_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\{(6-5\alpha)S_t - 2(5-4\alpha)D_t + (4-3\alpha)T_t\}$$

$$C_t = \frac{(\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}(S_t - 2D_t + T_t)$$

ここでは, 与えられた時系列データ

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

(x_n は最も現在に近いデータ) に関する平滑値 E_k, 予測値 E_{k+L}, 1 次傾向推定値 B_k および 2 次傾向推定値 C_k を求める. 各量の定義はつぎのとおり.

$$S_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \text{ (初期値)}$$

$$D_1 = S_1 = T_1 \text{ (初期値)}$$

$$S_j = \alpha x_{j+m-1} + (1-\alpha)S_{j-1}$$

$$D_j = \alpha S_j + (1-\alpha)D_{j-1}$$

$$T_j = \alpha D_j + (1-\alpha)T_{j-1} \qquad (j = 2, 3, \cdots, n-m+1)$$

$$E_k = 3S_k - 3D_k + T_k$$

$$B_k = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\{(6-5\alpha)S_k - 2(5-4\alpha)D_k + (4-3\alpha)T_k\}$$

$$C_k = \frac{(\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}(S_k - 2D_k + T_k)$$

$$E_{k+L} = E_k + B_k L + \frac{C_k}{2}L^2 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-m+1)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DFDPET (A, N, ALH, IN, M, EV, AV, TR, QR, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RFDPET (A, N, ALH, IN, M, EV, AV, TR, QR, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\begin{Bmatrix}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{Bmatrix}$	N	入 力	時系列データ x_j
2	N	I	1	入 力	時系列データの個数 n
3	ALH	$\begin{Bmatrix}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	平滑定数 α
4	IN	I	1	入 力	初期値設定のための平均項数 既定値:2 (IN =0 のとき)
5	M	I	1	入 力	タイムラグ L
6	EV	$\begin{Bmatrix}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{Bmatrix}$	N − IN + 1	出 力	平滑値 E_k
7	AV	$\begin{Bmatrix}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{Bmatrix}$	N − IN + 1	出 力	予測値 E_{k+L}
8	TR	$\begin{Bmatrix}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{Bmatrix}$	N − IN + 1	出 力	1 次傾向推定値 B_k
9	QR	$\begin{Bmatrix}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{Bmatrix}$	N − IN + 1	出 力	2 次傾向推定値 C_k
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{N} > 0$

(b) $0 \le \mathrm{IN} \le \mathrm{N}$

(c) $0.0 < \mathrm{ALH} < 1.0$

(d) $\mathrm{M} \ge 0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	N = IN	EV(1), AV(1) が計算され, QR(1), TR(1) には 0.0 がセットされる.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3100	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3200	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3300	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) この構造模型をもつと推定されるモデルの場合には最低 3 つ以上のデータが必要である. 2 点以下のデータで推定を行う統計的意味は存在しない.

第 6 章　推定と検定

6.1　概 要

母集団から (復元) 抽出された大きさ n の無作為標本は, 理論的には, 相互に独立で等しい確率分布をもつ n 個の確率変数の組

$$S = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

によって表される. S を大きさ n の標本と呼び, X_i の共通の確率分布を母集団分布と呼ぶ. 母集団分布を規定する定数を母数と呼び, その値が未知である母数を未知母数と呼ぶ. 統計分析では, このような未知母数の値の推定 (**統計的推定**) や未知母数の値に関する仮説が成立するか否かの決定 (**統計的仮説検定**) を取り扱う.

本ライブラリでは, 以下の様な推定と検定の計算を行うための機能を用意している.

- 区間推定
  - 1 組の標本における母比率の区間推定
  - 1 組の標本における母平均の区間推定
  - 2 組の独立標本における母平均の差の区間推定
  - 1 組の標本における母分散の区間推定
  - 1 組の標本の母相関係数の区間推定
  - 2 組の独立標本における母相関係数の差の区間推定
  - 単回帰における区間推定
- 検定
  - 1 組の標本における母比率の検定
  - 2 組の独立標本における母比率の差の検定
  - 1 組の標本における母平均の検定
  - 2 組の独立標本における母平均の差の検定
  - 1 組の標本における母分散の検定
  - 1 組の標本の母相関係数の検定
  - 2 組の独立標本における母相関係数の差の検定
  - 単回帰における検定

6.1.1 解説

(1) **1 組の標本における母比率の区間推定**

大きさ n の 1 組の標本データの中で, 注目している特性を持つ標本の数を m とするとき, 母比率 p に関する信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間を求める. なお, 信頼区間 (p_1, p_2) は次のように定義される.

$$p_1 = \frac{m}{(n-m+1)F_1 + m}$$

$$p_2 = \frac{(m+1)F_2}{(m+1)F_2 + (n-m)}$$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(F_1|2(n-m+1), 2m) = 1 - P(F_2|2(m+1), 2(n-m))$$

なお, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

また, 標本比率 $\hat{p} = \dfrac{m}{n}$ とすると

- $\hat{p} = 0$ の場合

  $$p_2 = \frac{F_\alpha}{n + F_\alpha}$$

  が信頼度 $1-\alpha$ の片側信頼区間の上限となる. ただし,

  $$\alpha = 1 - P(F_\alpha|2, 2n)$$

  なお, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

- $\hat{p} = 1$ の場合

  $$p_1 = \frac{n}{n + F_\alpha}$$

  が信頼度 $1-\alpha$ の片側信頼区間の下限となる. ただし,

  $$\alpha = 1 - P(F_\alpha|2, 2n)$$

  なお, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

(2) **1 組の標本における母平均の区間推定**

大きさ n の 1 組の標本データの平均値 μ および分散値 (または母分散値)σ^2 から, 信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合の母集団の平均値 (母平均) の信頼区間を求める. なお, 信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}$$

$$t_2 = \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}$$

ただし,

(a) 母分散の値が既知の場合

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

$$\beta = \frac{\sigma^2}{n}$$

σ^2 : 母分散の値

(b) 母分散の値が未知の場合

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}}|n-1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

$$\beta = \frac{\sigma^2}{n}$$

なお, σ^2 は母分散の不偏推定値

(3) **2 組の独立標本における母平均の差の区間推定**

大きさがそれぞれ n_1, n_2 の 2 組の独立標本データのそれぞれの平均値 μ_1, μ_2 および分散値 (または母分散値) σ_1^2, σ_2^2 から, 信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合の母集団の平均値 (母平均) の差の信頼区間を求める. なお, 信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = (\mu_1 - \mu_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta_1 + \beta_2}$$

$$t_2 = (\mu_1 - \mu_2) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta_1 + \beta_2}$$

ただし,

(a) 2 組の母分散の値が既知の場合

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の値

(b) 2 組の母分散の値が等しくその値が未知の場合

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}}|n_1 + n_2 - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{s_p^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{s_p^2}{n_2}$$

ただし,

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

なお, σ_1^2, σ_2^2 は母分散の不偏推定値.

(c) 2 組の母分散の値が等しくなくその値が未知の場合

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\beta_1 t_{\frac{\alpha}{2}}^{(1)} + \beta_2 t_{\frac{\alpha}{2}}^{(2)}}{\beta_1 + \beta_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}^{(1)}, n_1 - 1) = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}^{(2)}|n_2 - 1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

なお, σ_1^2, σ_2^2 は母分散の不偏推定値.

(4) **1 組の標本における母分散の区間推定**
大きさ n の 1 組の標本データの分散値 (または母分散値)σ^2 から, 信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合の母分散値の信頼区間を求める. なお, 信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \frac{\sigma^2(n-1)}{\chi_1^2}$$

$$t_2 = \frac{\sigma^2(n-1)}{\chi_2^2}$$

ただし, σ^2 は母分散の不偏推定値. また

$$\frac{\alpha}{2} = P(\chi_1^2|n-1) = 1 - P(\chi_2^2|n-1)$$

ここで $P(x|n)$ は自由度 n の χ^2 分布 c.d.f. の値

(5) **1 組の標本の母相関係数の区間推定**
大きさ n の 1 組の標本データの標本相関係数 r から母集団の相関係数 (母相関係数)ρ に関する信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合の信頼区間を求める. 信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \frac{e^{a-b}-1}{e^{a-b}+1}$$

$$t_2 = \frac{e^{a+b}-1}{e^{a+b}+1}$$

ただし,

$$a = \log_e \frac{1+r}{1-r}$$

$$b = \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n-3}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(6) **2 組の独立標本における母相関係数の差の区間推定**
大きさがそれぞれ n_1, n_2 の 2 組の独立標本データの標本相関係数を r_1, r_2 から信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合のそれぞれの標本が属している母集団の相関係数 (母相関係数) ρ_1, ρ_2 の差の信頼区間を求める. ただし, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ の場合は, ρ の信頼区間を求める.

(a) $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ のとき
ρ の信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \frac{e^{a-b}-1}{e^{a-b}+1}$$

$$t_2 = \frac{e^{a+b}-1}{e^{a+b}+1}$$

ただし,

$$a = \frac{2(n_1-3)z_1 + 2(n_2-3)z_2}{n_1+n_2-6}$$

$$b = \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n_1+n_2-6}}$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_1}{1-r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(b) $\rho_1 \neq \rho_2$ のとき

$\rho_1 - \rho_2$ の信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \frac{e^{a-b}-1}{e^{a-b}+1}$$

$$t_2 = \frac{e^{a+b}-1}{e^{a+b}+1}$$

ただし,

$$a = \log_e \frac{1+r_1}{1-r_1} - \log_e \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$b = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(7) **単回帰における区間推定**

大きさ n の 1 組の標本データ $\{x_i,\, y_i\}$ $(1, \cdots, n)$ に関する単回帰式 (または回帰直線)

$$\hat{y}_i = ax_i + b$$

における回帰係数 a, 切片 b, ある特定のデータ x_0 に対する予測値 $\hat{y}_0$ および理論値 $Ax_0 - B$ の信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間を求める. なお, おのおのの x_i に対応する y_i は, 平均 $Ax_i - B$, 分散 σ^2 の正規母集団から抽出された無作為標本であると仮定する.

標本データの回帰係数 a および切片 b は以下の正規方程式から求める.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

(a) 回帰係数

$$t_1 = a - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_a$$

$$t_2 = a + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_a$$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i-\mu_x)^2}}$$

i. 母分散の値が既知の場合

σ^2：母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(t)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(b) 切片

$$t_1 = a - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_b$$

$$t_2 = a + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_b$$

ただし，

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

i. 母分散の値が既知の場合

σ^2：母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(t)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(c) 予測値

$$t_1 = \hat{y}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_y$$

$$t_2 = \hat{y}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_y$$

ただし，

$$s_y = \sqrt{\sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \mu_x)^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

i. 母分散の値が既知の場合

σ^2：母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(t)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(d) 理論値

$$t_1 = \hat{y}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_0$$

$$t_2 = \hat{y}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_0$$

ただし,

$$s_0 = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \mu_x)^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

i. 母分散の値が既知の場合

σ^2 : 母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(t)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

σ^2 : 残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}} | n - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(8) **1 組の標本における母比率の検定**

大きさ n の標本データにおいて, 注目する特性をもつデータの数が m であるとき, この標本データが属する母集団における比率 (母比率) p に関する仮説 $p = p_0$ を信頼度 $1 - \alpha$ で検定する. 検定基準は以下のとおり.

(a) 対立仮説が $p \neq p_0$ の場合

$$f_1 = \frac{2(n-m)p_0}{2(m+1)(1-p_0)}$$

$$f_2 = \frac{2m(1-p_0)}{2(n-m+1)p_0}$$

としたとき, $\begin{cases} f_1 \geq F_1 \text{または } f_2 \geq F_2 \text{ならば棄却} \\ f_1 < F_1 \text{かつ } f_2 < F_2 \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(F_1 | 2(n-m+1), 2m) = 1 - P(F_2 | 2(m+1), 2(n-m))$$

ここで, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

(b) 対立仮説が $p < p_0$ の場合

$$f_1 = \frac{2(n-m)p_0}{2(m+1)(1-p_0)}$$

としたとき, $\begin{cases} f_1 \geq F_1^* \text{ならば棄却} \\ f_1 < F_1^* \text{ならば採択} \end{cases}$ ただし,

$$\alpha = 1 - P(F_1^* | 2(m+1), 2(n-m))$$

ここで, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

(c) 対立仮説が $p > p_0$ の場合

$$f_2 = \frac{2m(1-p_0)}{2(n-m+1)(1-p_0)}$$

としたとき, $\begin{cases} f_2 \geq F_2^* \text{ならば棄却} \\ f_2 < F_2^* \text{ならば採択} \end{cases}$ ただし,

$$\alpha = 1 - P(F_2^*|2(n-m+1), 2m)$$

ここで, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

(9) **2 組の独立標本における母比率の差の検定**

大きさが n_1, n_2 の 2 組の独立標本データにおいて注目する特性をもつデータの数がそれぞれ m_1, m_2 であるとき, それぞれの標本データが属する母集団における比率 (母比率) p_1, p_2 に関する仮説 $p_1 = p_2$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する.

2 組の独立標本における標本比率をそれぞれ $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ とする.

$$\hat{p}_1 = \frac{m_1}{n_1}, \hat{p}_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

検定基準は以下のとおり.

(a) 連続性の修正を行わない場合

i. 対立仮説が $p_1 \neq p_2$ の場合

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |z| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $p_1 < p_2$ の場合

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} z \leq -z_\alpha \text{ならば棄却} \\ z > -z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $p_1 > p_2$ の場合

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} z \geq z_\alpha \text{ならば棄却} \\ z < z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(b) 連続性の修正を行う場合

i. 対立仮説が $p_1 \neq p_2$ の場合

$$\begin{cases} z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 \geq \hat{p}_2\text{のとき}) \\ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 < \hat{p}_2\text{のとき}) \end{cases}$$

として $\begin{cases} |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\text{ならば棄却} \\ |z| < z_{\frac{\alpha}{2}}\text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $p_1 < p_2$ の場合

$$\begin{cases} z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 \geq \hat{p}_2\text{のとき}) \\ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 < \hat{p}_2\text{のとき}) \end{cases}$$

として $\begin{cases} z \leq -z_{\alpha}\text{ならば棄却} \\ z > -z_{\alpha}\text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $p_1 > p_2$ の場合

$$\begin{cases} z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 \geq \hat{p}_2\text{のとき}) \\ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 < \hat{p}_2\text{のとき}) \end{cases}$$

として $\begin{cases} z \geq z_{\alpha}\text{ならば棄却} \\ z < z_{\alpha}\text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(10) **1 組の標本における母平均の検定**
大きさ n の 1 組の標本データの平均値 μ_x および分散値 (または母分散値) σ^2 から, 母集団の平均値 (母平均)μ に関する仮説 $\mu = \mu_0$ を信頼度 $1 - \alpha$ で検定する. 検定基準は以下のとおり.

(a) 母分散の値が既知の場合

i. 対立仮説が $\mu \neq \mu_0$ の場合
$$z = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$
として $\begin{cases} |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |z| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$
ただし,
σ^2 : 母分散の値
$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$
ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $\mu < \mu_0$ の場合
$$z = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$
として $\begin{cases} z \leq -z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z > -z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$
ただし,
σ^2 : 母分散の値
$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$
ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $\mu > \mu_0$ の場合
$$z = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$
として $\begin{cases} z \geq z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z < z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$
ただし,
σ^2 : 母分散の値
$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$
ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(b) 母分散の値が未知の場合

i. 対立仮説が $\mu \neq \mu_0$ の場合
$$t = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$
として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$
ただし,
σ^2 : 母分散の不偏推定値
$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-1)$$
ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $\mu < \mu_0$ の場合

$$t = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

として $\begin{cases} t \le -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t > -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

σ^2：母分散の不偏推定値

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n-1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $\mu > \mu_0$ の場合

$$t = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

として $\begin{cases} t \ge t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

σ^2：母分散の不偏推定値

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n-1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

(11) **2 組の独立標本における母平均の差の検定**

大きさがそれぞれ n_1, n_2 の 2 組の独立標本データのそれぞれの平均値 μ_{x_1}, μ_{x_2} および分散値 (または母分散値) σ_1^2, σ_2^2 から, それぞれの標本が属している母集団の平均値 μ_1, μ_2 に関する仮説 $\mu_1 = \mu_2$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する. 検定基準は以下のとおり.

(a) 2 組の母分散の値が既知の場合

i. 対立仮説が $\mu_1 \ne \mu_2$ の場合

$$z = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

として $\begin{cases} |z| \ge z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |z| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2：2 組の母分散の値

ii. 対立仮説が $\mu_1 < \mu_2$ の場合

$$z = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

として $\begin{cases} z \le -z_\alpha \text{ならば棄却} \\ z > -z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2：2 組の母分散の値

iii. 対立仮説が $\mu_1 > \mu_2$ の場合

$$z = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

として $\begin{cases} z \geq z_\alpha \text{ならば棄却} \\ z < z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の値

(b) 2 組の母分散の値が等しくその値が未知の場合

i. 対立仮説が $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{s_p^2(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n_1 + n_2 - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

ii. 対立仮説が $\mu_1 < \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{s_p^2(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} t \leq -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t > -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n_1 + n_2 - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

iii. 対立仮説が $\mu_1 > \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{s_p^2(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} t \geq t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n_1 + n_2 - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

(c) 2 組の母分散の値が等しくなくその値が未知の場合

i. 対立仮説が $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$t^*_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\beta_1 t^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}} + \beta_2 t^{(2)}_{\frac{\alpha}{2}}}{\beta_1 + \beta_2}$$

として, $\begin{cases} |t| \geq t^*_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t^*_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}}|n_1 - 1) = 1 - P(t^{(2)}_{\frac{\alpha}{2}}|n_2 - 1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

ii. 対立仮説が $\mu_1 < \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$t^*_{\alpha} = \frac{\beta_1 t^{(1)}_{\alpha} + \beta_2 t^{(2)}_{\alpha}}{\beta_1 + \beta_2}$$

として, $\begin{cases} t \leq -t^*_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ t > -t^*_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\alpha = 1 - P(t^{(1)}_{\alpha}|n_1 - 1) = 1 - P(t^{(2)}_{\alpha}|n_2 - 1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

iii. 対立仮説が $\mu_1 > \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$t^*_{\alpha} = \frac{\beta_1 t^{(1)}_{\alpha} + \beta_2 t^{(2)}_{\alpha}}{\beta_1 + \beta_2}$$

として, $\begin{cases} t \geq t^*_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ t < t^*_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\alpha = 1 - P(t^{(1)}_{\alpha}|n_1 - 1) = 1 - P(t^{(2)}_{\alpha}|n_2 - 1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

(12) **1 組の標本における母分散の検定**

大きさ n の 1 組の標本データの分散値 (母分散の不偏推定値)s^2 から, 母分散値 σ^2 に関する仮説 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ を信頼度 $1 - \alpha$ で検定する. 検定基準は以下のとおり.

(a) 対立仮説が $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ の場合

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

として $\begin{cases} \chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{または} \chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}|n-1) = P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}|n-1)$$

ここで $P(\chi^2|n)$ は自由度 n の χ^2 分布の c.d.f. の値

s^2：母分散の不偏推定値

(b) 対立仮説が $\sigma^2 < \sigma_0^2$ の場合

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

として $\begin{cases} \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha} \text{ならば棄却} \\ \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$\alpha = P(\chi^2_{1-\alpha}|n-1)$$

ここで $P(\chi^2|n)$ は自由度 n の χ^2 分布の c.d.f. の値

s^2：母分散の不偏推定値

(c) 対立仮説が $\sigma^2 > \sigma_0^2$ の場合

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

として $\begin{cases} \chi^2 \geq \chi^2_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ \chi^2 < \chi^2_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$\alpha = P(\chi^2_{\alpha}|n-1)$$

ここで $P(\chi^2|n)$ は自由度 n の χ^2 分布の c.d.f. の値

s^2：母分散の不偏推定値

(13) **1 組の標本の母相関係数の検定**

大きさ n の 1 組の標本データの標本相関係数 r から母集団の相関係数 (母相関係数) ρ に関する仮説 $\rho = \rho_0$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する．検定基準は以下のとおり．

(a) 仮説: $\rho = 0$

i. 対立仮説が $\rho \neq 0$ の場合

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $\rho < 0$ の場合

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

として $\begin{cases} t \geq -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_\alpha|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $\rho > 0$ の場合

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

として $\begin{cases} t \geq t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_\alpha|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

(b) 仮説: $\rho = \rho_0$

i. 対立仮説が $\rho \neq \rho_0$ の場合

$$t = (z - z_0)\sqrt{n-3}$$

として $\begin{cases} |t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$z = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+r}{1-r}$$

$$z_0 = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $\rho < \rho_0$ の場合

$$t = (z - z_0)\sqrt{n-3}$$

として $\begin{cases} t \leq -z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t > -z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$z = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+r}{1-r}$$

$$z_0 = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $\rho > \rho_0$ の場合

$$t = (z - z_0)\sqrt{n-3}$$

として $\begin{cases} t \geq z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$z = \frac{1}{2}\log_e\frac{1+r}{1-r}$$

$$z_0 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(14) **2 組の独立標本における母相関係数の差の検定**

大きさがそれぞれ n_1, n_2 の 2 組の独立標本データの標本相関係数 r_1, r_2 からそれぞれの標本が属している母集団の相関係数 (母相関係数) ρ_1, ρ_2 に関する仮説 $\rho_1 = \rho_2$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する．検定基準は以下のとおり．

(a) 対立仮説が $\rho_1 \neq \rho_2$ の場合

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1-3} + \dfrac{1}{n_2-3}}}$$

として $\begin{cases} |t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_1}{1-r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(b) 対立仮説が $\rho_1 < \rho_2$ の場合

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1-3} + \dfrac{1}{n_2-3}}}$$

として $\begin{cases} t \leq -z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t > -z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_1}{1-r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(c) 対立仮説が $\rho_1 > \rho_2$ の場合

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1-3} + \dfrac{1}{n_2-3}}}$$

として $\begin{cases} t \geq z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_1}{1-r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(15) **単回帰における検定**

大きさ n の 1 組の標本データ $\{x_i, y_i\}$ $(1, \cdots, n)$ に関する単回帰式 (または回帰直線)

$$\hat{y}_i = ax_i + b$$

における回帰係数 a, 切片 b から母集団の回帰係数 A および切片 B に関する仮説を信頼度 $1-\alpha$ で検定する. なお, おのおのの x_i に対応する y_i は, 平均 $Ax_i - B$, 分散 σ^2 の正規母集団から抽出された無作為標本であると仮定する.

標本データの回帰係数 a および切片 b は以下の正規方程式から求める.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

検定基準は以下のとおり.

(a) 回帰係数

仮説: $A = A_0$

i. 母分散の値が既知の場合

A. 対立仮説が $A \neq A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} |t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2 : 母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

B. 対立仮説が $A < A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} t \geq -z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < -z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2 : 母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

C. 対立仮説が $A > A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} t \geq z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2：母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

A. 対立仮説が $A < A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}} | n - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

B. 対立仮説が $A < A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} t \geq -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha | n - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

C. 対立仮説が $A > A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} t \geq t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha | n - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(b) 切片

仮説: $B = B_0$

i. 母分散の値が既知の場合

A. 対立仮説が $B \neq B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} |t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}\right]}$$

σ^2：母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

B. 対立仮説が $B < B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} t \geq -z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < -z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}\right]}$$

σ^2：母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

C. 対立仮説が $B > B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} t \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ t < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}\right]}$$

σ^2：母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

A. 対立仮説が $B \neq B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}\right]}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

B. 対立仮説が $B < B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} t \geq -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}\right]}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

C. 対立仮説が $B > B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} t \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ t < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}\right]}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

6.1.2 参考文献

(1) 武藤眞介, “統計解析ハンドブック”, 朝倉書店 (1995).

6.2 区間推定

6.2.1 D3IERA, R3IERA
1 組の標本における母比率の区間推定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データの中で, 注目している特性を持つ標本の数を m とするとき, 母比率 p に関する信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間を求める. なお, 信頼区間 (p_1, p_2) は次のように定義される.

$$p_1 = \frac{m}{(n-m+1)F_1 + m}$$

$$p_2 = \frac{(m+1)F_2}{(m+1)F_2 + (n-m)}$$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(F_1|2(n-m+1), 2m) = 1 - P(F_2|2(m+1), 2(n-m))$$

なお, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値
また, 標本比率 $\hat{p} = \frac{m}{n}$ とすると

- $\hat{p} = 0$ の場合

  $$p_2 = \frac{F_\alpha}{n + F_\alpha}$$

  が信頼度 $1-\alpha$ の片側信頼区間の上限となる. ただし,

  $$\alpha = 1 - P(F_\alpha|2, 2n)$$

  なお, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

- $\hat{p} = 1$ の場合

  $$p_1 = \frac{n}{n + F_\alpha}$$

  が信頼度 $1-\alpha$ の片側信頼区間の下限となる. ただし,

  $$\alpha = 1 - P(F_\alpha|2, 2n)$$

  なお, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3IERA (N, M, CL, CI, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3IERA (N, M, CL, CI, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	標本データの数 n
2	M	I	1	入 力	注目している特性を持つ標本の数
3	CL	{D/R}	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
4	CI	{D/R}	2	出 力	CI (1) ：信頼区間 (下限) p_1 CI (2) ：信頼区間 (上限) p_2
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $\mathrm{N} > 0$

(b) $0 \leq \mathrm{M}$

(c) $\mathrm{N} \geq \mathrm{M}$

(d) $0.0 \leq \mathrm{CL} \leq 100.0$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	CL=100.0	CI(1)=0.0, CI(2)=1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) 注意事項

なし

(7) 使用例

(a) 問 題

大きさ 20 の標本の中で注目している特性を持つ標本の数を 14 とするとき信頼度 95%の母比率の信頼区間を求める.

(b) 入力データ

N=20, M=14, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3IERA
! *** EXAMPLE OF D3IERA ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N,M
      REAL(8) CL,CI(2)
!
      N=20
      M=14
      CL=90.0D0
```

```
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N
      WRITE(6,2010) M
      WRITE(6,2020) CL
      WRITE(6,3000)
      CALL D3IERA(N,M,CL,CI,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,6000) CI(1),CI(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3IERA ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N    = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'M    = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'CL   = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 6000 FORMAT(9X,'CI(1) = ',F8.4,2X,'CI(2) = ',F8.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3IERA ***
      ** INPUT **
         N    =  20
         M    =  14
         CL   = 90.0


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         CI(1) =    0.4922  CI(2) =    0.8604
```

6.2.2 D3IEME, R3IEME 1 組の標本における母平均の区間推定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データの平均値 μ および分散値 (または母分散値)σ^2 から, 信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合の母集団の平均値 (母平均) の信頼区間を求める. なお, 信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \mu - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}$$

$$t_2 = \mu + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}$$

ただし,

(a) 母分散の値が既知の場合

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

$$\beta = \frac{\sigma^2}{n}$$

σ^2 : 母分散の値

(b) 母分散の値が未知の場合

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}}|n-1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

$$\beta = \frac{\sigma^2}{n}$$

なお, σ^2 は母分散の不偏推定値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3IEME (N, XE, XV, CL, CI, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3IEME (N, XE, XV, CL, CI, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	標本データの数 n
2	XE	{D/R}	1	入 力	標本データの平均 μ
3	XV	{D/R}	1	入 力	標本データまたは母集団の分散 σ^2
4	CL	{D/R}	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)$(%)
5	CI	{D/R}	2	出 力	CI(1)：信頼区間 (下限) t_1 CI(2)：信頼区間 (上限) t_2
6	ISW	I	1	入 力	分散に関するスイッチ ISW=1：XV に母集団の分散を入力する ISW=2：XV に標本データの分散 (不偏推定値でない) を入力する ISW=3：XV に標本データの分散 (不偏推定値) を入力する
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{1, 2, 3\}$

(b) N ≥ 2

(c) XV > 0.0

(d) $0.0 \leq$ CL ≤ 100.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	CL=100.0	CI(1) に負の最小値, CI(2) に正の最大値をセットする.
1010	CL=0.0 (信頼度 0.0%)	CI(1), CI(2) に平均値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

標本データ数が 100 個で, 平均 42.0, 不偏分散 2.25 のとき, 信頼度 95% の母平均の信頼区間を求める.

(b) 入力データ

ISW=1, N=100, XE=42.0, XV=2.25, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3IEME
! *** EXAMPLE OF D3IEME ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N,ISW
      REAL(8) XE,XV,CL,CI(2)
!
      ISW=1
      N=100
      XE=42.0D0
      XV=2.25D0
      CL=95.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) ISW
      WRITE(6,2010) N
      WRITE(6,2020) XE
      WRITE(6,2030) XV
      WRITE(6,2040) CL
      WRITE(6,3000)
      CALL D3IEME(N,XE,XV,CL,CI,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) CI(1),CI(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3IEME ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'ISW = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N   = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'XE  = ',F4.1)
 2030 FORMAT(9X,'XV  = ',F4.1)
 2040 FORMAT(9X,'CL  = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'INTERVAL = (',D17.10,',',D17.10,')')
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3IEME ***
      ** INPUT **
         ISW =   1
         N   = 100
         XE  = 42.0
         XV  =  2.3
         CL  = 95.0


      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         INTERVAL = ( 0.4170600540D+02, 0.4229399460D+02)
```

6.2.3 D3IESU, R3IESU 2 組の独立標本における母平均の差の区間推定

(1) **機 能**

大きさがそれぞれ n_1, n_2 の 2 組の独立標本データのそれぞれの平均値 μ_1, μ_2 および分散値 (または母分散値) σ_1^2, σ_2^2 から, 信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合の母集団の平均値 (母平均) の差の信頼区間を求める．なお, 信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される．

$$t_1 = (\mu_1 - \mu_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta_1 + \beta_2}$$

$$t_2 = (\mu_1 - \mu_2) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta_1 + \beta_2}$$

ただし,

(a) 2 組の母分散の値が既知の場合

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の値

(b) 2 組の母分散の値が等しくその値が未知の場合

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}}|n_1 + n_2 - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{s_p^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{s_p^2}{n_2}$$

ただし,

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

なお, σ_1^2, σ_2^2 は母分散の不偏推定値.

(c) 2 組の母分散の値が等しくなくその値が未知の場合

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\beta_1 t^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}} + \beta_2 t^{(2)}_{\frac{\alpha}{2}}}{\beta_1 + \beta_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}}, n_1 - 1) = 1 - P(t^{(2)}_{\frac{\alpha}{2}}|n_2 - 1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

なお, σ_1^2, σ_2^2 は母分散の不偏推定値.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3IESU (N1, XE1, XV1, N2, XE2, XV2, CL, CI, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3IESU (N1, XE1, XV1, N2, XE2, XV2, CL, CI, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\\text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	N1	I	1	入 力	第 1 の標本データの数 n_1
2	XE1	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	第 1 の標本データの平均 μ_1
3	XV1	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	第 1 の標本データまたは母集団の分散 ${\sigma_1}^2$
4	N2	I	1	入 力	第 2 の標本データの数 n_2
5	XE2	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	第 2 の標本データの平均 μ_2
6	XV2	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	第 2 の標本データまたは母集団の分散 ${\sigma_2}^2$
7	CL	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
8	CI	$\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{matrix}\right\}$	2	出 力	CI(1)：信頼区間 (下限) t_1 CI(2)：信頼区間 (上限) t_2
9	ISW	I	1	入 力	分散に関するスイッチ ISW=1：XV1, XV2 に 2 組の母分散を入力する ISW=2：2 組の母分散が等しく，XV1, XV2 に標本データの分散 (不偏推定値でない) を入力する ISW=3：2 組の母分散が等しく，XV1, XV2 に標本データの分散 (不偏推定値) を入力する ISW=4：2 組の母分散が等しくなく，XV1, XV2 に標本データの分散 (不偏推定値でない) を入力する ISW=5：2 組の母分散が等しくなく，XV1, XV2 に標本データの分散 (不偏推定値) を入力する
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{ISW} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) $\mathrm{N1}, \mathrm{N2} \geq 2$

(c) $\mathrm{XV1}, \mathrm{XV2} > 0.0$

(d) $0.0 \leq \mathrm{CL} \leq 100.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	CL=100.0	CI(1) に負の最小値, CI(2) に正の最大値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

標本データ数, 平均, 不偏分散がそれぞれ 100, 42.0, 2.25 と 50, 30.0, 3.25 である母分散が等しくない 2 組の独立な標本から信頼度 95% の母平均の差の信頼区間を求める.

(b) 入力データ

ISW=5, N1=100, XE1=42.0, XV1=2.25, N2=50, XE2=30.0, XV2=3.25, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3IESU
! *** EXAMPLE OF D3IESU ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N1,N2,ISW
      REAL(8) XE1,XV1,XE2,XV2,CL,CI(2)
!
      ISW=5
      N1=100
      XE1=42.0D0
      XV1=2.25D0
      N2=50
      XE2=30.0D0
      XV2=3.25D0
      CL=95.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) ISW
      WRITE(6,*) '  FOR SAMPLE 1'
      WRITE(6,2010) N1
      WRITE(6,2020) XE1
      WRITE(6,2030) XV1
      WRITE(6,*) '  FOR SAMPLE 2'
      WRITE(6,2010) N2
      WRITE(6,2020) XE2
      WRITE(6,2030) XV2
      WRITE(6,2040) CL
      WRITE(6,3000)
      CALL D3IESU(N1,XE1,XV1,N2,XE2,XV2,CL,CI,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) CI(1),CI(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3IESU ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'ISW = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N   = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'XE  = ',F4.1)
 2030 FORMAT(9X,'XV  = ',F4.1)
 2040 FORMAT(9X,'CL  = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'INTERVAL = (',D17.10,',',D17.10,')')
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3IESU ***
      ** INPUT **
         ISW =   5
  FOR SAMPLE 1
         N   = 100
```

```
      XE  = 42.0
      XV  =  2.3
FOR SAMPLE 2
      N   =  50
      XE  = 30.0
      XV  =  3.3
      CL  = 95.0


   ** OUTPUT **
      IERR =    0
      INTERVAL = ( 0.1140748848D+02, 0.1259251152D+02)
```

6.2.4 D3IEVA, R3IEVA
1 組の標本における母分散の区間推定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データの分散値 (または母分散値)σ^2 から, 信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合の母分散値の信頼区間を求める. なお, 信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \frac{\sigma^2(n-1)}{\chi_1^2}$$

$$t_2 = \frac{\sigma^2(n-1)}{\chi_2^2}$$

ただし, σ^2 は母分散の不偏推定値. また

$$\frac{\alpha}{2} = P(\chi_1^2|n-1) = 1 - P(\chi_2^2|n-1)$$

ここで $P(x|n)$ は自由度 n の χ^2 分布 c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:
CALL D3IEVA (N, XV, CL, CI, ISW, IERR)
単精度サブルーチン:
CALL R3IEVA (N, XV, CL, CI, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\\text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	標本データの数 n
2	XV	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	標本データの分散 σ^2
3	CL	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
4	CI	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	2	出 力	CI(1) : 信頼区間 (下限) t_1 CI(2) : 信頼区間 (上限) t_2
5	ISW	I	1	入 力	ISW=1 : XV に標本データの分散 (不偏推定値でない) を入力する ISW=2 : XV に標本データの分散 (不偏推定値) を入力する
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{1, 2\}$

(b) N $\geq$ 2

(c) XV $>$ 0.0

(d) 0.0 $<$ CL $\leq$ 100.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	CL=100.0	CI(1) に 0.0, CI(2) に正の最大値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 分散 σ^2 に対する信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間が (t_1, t_2) である時, 標準偏差 σ に対する信頼区間は $(\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2})$ になる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

標本データ数が 25 個で, 不偏分散 29.16 のとき, 信頼度 95% の母分散の信頼区間を求める.

(b) 入力データ

ISW=2, N=25, XV=29.16, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3IEVA
! *** EXAMPLE OF D3IEVA ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N,ISW
      REAL(8) XV,CL,CI(2)
!
      ISW=2
      N=25
      XV=29.16D0
      CL=95.0D0
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) ISW
      WRITE(6,2010) N
      WRITE(6,2030) XV
      WRITE(6,2040) CL
      WRITE(6,3000)
      CALL D3IEVA(N,XV,CL,CI,ISW,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) CI(1),CI(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3IEVA ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'ISW = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N   = ',I3)
 2030 FORMAT(9X,'XV  = ',F4.1)
 2040 FORMAT(9X,'CL  = ',F4.1)
 3000 FORMAT(' ',/,/,6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'INTERVAL = (',D17.10,',',D17.10,')')
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D3IEVA ***
 ** INPUT **
    ISW =   2
    N   =  25
    XV  = 29.2
    CL  = 95.0


 ** OUTPUT **
    IERR =     0
    INTERVAL = ( 0.1777864624D+02, 0.5643347494D+02)
```

6.2.5 D3IETC, R3IETC 1組の標本における母相関係数の区間推定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データの標本相関係数 r から母集団の相関係数 (母相関係数)ρ に関する信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合の信頼区間を求める. 信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \frac{e^{a-b}-1}{e^{a-b}+1}$$

$$t_2 = \frac{e^{a+b}-1}{e^{a+b}+1}$$

ただし,

$$a = \log_e \frac{1+r}{1-r}$$

$$b = \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n-3}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:
  CALL D3IETC (N, R, CL, T, IERR)
単精度サブルーチン:
  CALL R3IETC (N, R, CL, T, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\\text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	N	I	1	入 力	標本データの数 n
2	R	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	1 組の標本の標本相関係数 r (注意事項 (a) 参照)
3	CL	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)$(%)
4	T	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	2	出 力	T(1) : 信頼区間 (下限) t_1 T(2) : 信頼区間 (上限) t_2
5	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥2

(b) $-1.0 < \mathrm{R} < 1.0$

(c) 0.0≤CL≤100.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	CL=100.0	$\mathrm{T}(1) = -1.0$, $\mathrm{T}(2) = 1.0$ をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) n 個のデータからなる 1 組の標本 $\{x_i, y_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ の標本相関係数 r は, 次の式によって与えられる.
(4.4.1 $\left\{\begin{matrix}\text{D2CCMT}\\ \text{R2CCMT}\end{matrix}\right\}$ 参照)

$$r = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題
大きさ 10 の 1 組の標本データ

x_i	y_i
10.129	63.4
12.611	60.1
13.900	57.2
16.532	46.5
20.822	43.9
26.025	39.6
28.283	39.7
29.199	39.1
30.766	37.8
32.664	27.8

について信頼度 95%の母相関係数の信頼区間を求める.

(b) 入力データ
N=10, CL=95.0, 標本データ $\{x_i, y_i\}$
R : D2CCMT より算出

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3IETC
! *** EXAMPLE OF D3IETC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER N
      PARAMETER (N=10)
      INTEGER M
      PARAMETER (M=2)
      REAL(8) X(N,2),X1(M),WK(M),RR(N,M)
      INTEGER IERR,NS,KERR,ISW
      REAL(8) R,CL,T(2)
      DATA (X(I,1),I=1,N)&
            /10.129D0, 12.611D0, 13.900D0, 16.532D0, 20.822D0,&
             26.025D0, 28.283D0, 29.199D0, 30.766D0, 32.664D0/,&
           (X(I,2),I=1,N) &
            /63.4D0, 60.1D0, 57.2D0, 46.5D0, 43.9D0,&
             39.6D0, 39.7D0, 39.1D0, 37.8D0, 37.8D0/
!
      CL=95.0D0
!
      ISW=0
!
      CALL D2CCMT(X,N,N,M,NS,X1,RR,N,ISW,WK,KERR)
!
      IF (KERR.NE.0) THEN
        WRITE(6,900)KERR
        STOP
      ENDIF
      R=RR(1,2)
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2010) N
      WRITE(6,2030) CL
      WRITE(6,2100)
      DO 100 I=1,N
         WRITE(6,2110)I,X(I,1),X(I,2)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,3000)
!
      CALL D3IETC(N,R,CL,T,IERR)
!
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) R
      WRITE(6,5100) T(1),T(2)
!
      STOP
!
  900 FORMAT(' ',/,5X,'ERROR OCCURED IN D2CCMT',/,1X,'KERR=',I4)
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3IETC ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2010 FORMAT(9X,'N    = ',I3)
 2030 FORMAT(9X,'CL   = ',F5.1)
 2100 FORMAT(9X,'NO.',1X,'SAMPLE1',1X,'SAMPLE2')
 2110 FORMAT(9X,I3,2F8.3)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'R    = ',F15.8)
 5100 FORMAT(9X,'INTERVAL = (',D18.10,',',D18.10,')')
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3IETC ***
      ** INPUT **
         N    =  10
         CL   =  95.0
         NO. SAMPLE1 SAMPLE2
           1  10.129  63.400
           2  12.611  60.100
           3  13.900  57.200
           4  16.532  46.500
           5  20.822  43.900
           6  26.025  39.600
           7  28.283  39.700
           8  29.199  39.100
           9  30.766  37.800
          10  32.664  37.800
      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         R    =     -0.94474904
         INTERVAL = ( -0.9871689208D+00, -0.7777713387D+00)
```

6.2.6 D3IECD, R3IECD 2 組の独立標本における母相関係数の差の区間推定

(1) **機 能**

大きさがそれぞれ n_1, n_2 の 2 組の独立標本データの標本相関係数を r_1, r_2 から信頼度 $1-\alpha$ を指定した場合のそれぞれの標本が属している母集団の相関係数 (母相関係数) ρ_1, ρ_2 の差の信頼区間を求める. ただし, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ の場合は, ρ の信頼区間を求める.

(a) $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ のとき

ρ の信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \frac{e^{a-b}-1}{e^{a-b}+1}$$

$$t_2 = \frac{e^{a+b}-1}{e^{a+b}+1}$$

ただし,

$$a = \frac{2(n_1-3)z_1 + 2(n_2-3)z_2}{n_1+n_2-6}$$

$$b = \frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n_1+n_2-6}}$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_1}{1-r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(b) $\rho_1 \neq \rho_2$ のとき

$\rho_1 - \rho_2$ の信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

$$t_1 = \frac{e^{a-b}-1}{e^{a-b}+1}$$

$$t_2 = \frac{e^{a+b}-1}{e^{a+b}+1}$$

ただし,

$$a = \log_e \frac{1+r_1}{1-r_1} - \log_e \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$b = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n_1-3}+\frac{1}{n_2-3}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3IECD (N1, R1, N2, R2, CL, T, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3IECD (N1, R1, N2, R2, CL, T, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N1	I	1	入 力	第 1 の標本データの数 n_1
2	R1	{D / R}	1	入 力	第 1 の標本データの相関係数 r_1 (注意事項 (a) 参照)
3	N2	I	1	入 力	第 2 の標本データの数 n_2
4	R2	{D / R}	1	入 力	第 2 の標本データの相関係数 r_2 (注意事項 (a) 参照)
5	CL	{D / R}	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
6	T	{D / R}	3	出 力	T (1) ：信頼区間 (下限) t_1 T (2) ：信頼区間 (上限) t_2
7	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ ISW=1：$\rho_1 = \rho_2$ のとき ISW=2：$\rho_1 \neq \rho_2$ のとき
8	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW $\in \{1, 2\}$

(b) N1 ≥ 4, N2 ≥ 4

(c) $-1.0 <$ R1 < 1.0, $-1.0 <$ R2 < 1.0

(d) $0.0 \leq$ CL ≤ 100.0

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	CL=100.0	T(1) = −1.0, T(2) = 1.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) n 個のデータからなる 1 組の標本 $\{x_i, y_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ の標本相関係数 r は, 次の式によって与えられる. (4.4.1 $\left\{\begin{matrix}\text{D2CCMT}\\ \text{R2CCMT}\end{matrix}\right\}$ 参照)

$$r = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2}\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2}}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

標本データ数, 標本相関係数がそれぞれ 50, 0.8 と 40, 0.6 である 2 組の独立な標本において信頼度 95%として母相関係数に関する仮説 $\rho_1 = \rho_2$ を検定する. なお, 対立仮説は $\rho_1 \neq \rho_2$ とする.
さらに, 仮説 $\rho_1 = \rho_2$ が採択された場合は, 母相関係数 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ の信頼度 95%の信頼区間を求め, 仮説 $\rho_1 = \rho_2$ が棄却された場合は, 母相関係数の差 $\rho_1 - \rho_2$ の信頼度 95%の信頼区間を求める.

(b) 入力データ

N1=50, R1=0.8, N2=40, R2=0.6, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3IECD
! *** EXAMPLE OF D3IECD ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERRTS,IERRIE
      INTEGER N1,N2,ISWTS,ISWIE
      REAL(8) R1,R2,CL,T(2),Z(2)
!
      ISWTS=1
      N1=50
      N2=40
      R1=0.8D0
      R2=0.6D0
      CL=95.0D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1010)
      WRITE(6,1100) ISWTS
      WRITE(6,2010) N1
      WRITE(6,2015) N2
      WRITE(6,2020) R1
      WRITE(6,2025) R2
      WRITE(6,2030) CL
      WRITE(6,1020)
      WRITE(6,2010) N1
      WRITE(6,2015) N2
      WRITE(6,2020) R1
      WRITE(6,2025) R2
      WRITE(6,2030) CL
      WRITE(6,3000)
!
      CALL D3TSCD(N1,R1,N2,R2,CL,IR,Z,ISWTS,IERRTS)
!
      WRITE(6,1010)
      WRITE(6,4000) IERRTS
      WRITE(6,5000)
      IF(IR.EQ.0) THEN
         WRITE(6,5010)
      ELSE
         WRITE(6,5020)
      ENDIF
!
      WRITE(6,6000) Z(1),Z(2)
      IF(IR.EQ.0) THEN
         ISWIE=1
      ELSE
         ISWIE=2
      ENDIF
!
      CALL D3IECD(N1,R1,N2,R2,CL,T,ISWIE,IERRIE)
!
      WRITE(6,1020)
      WRITE(6,4010) IERRIE
      WRITE(6,1110) ISWIE
      WRITE(6,7000) T(1),T(2)
!
      STOP
!
```

```
1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3IECD ***',/,&
     6X,'** INPUT **')
1010 FORMAT(9X,'** D3TSCD **')
1020 FORMAT(9X,'** D3IECD **')
1100 FORMAT(9X,'ISWTS = ',I3)
1110 FORMAT(9X,'ISWIE = ',I3)
2010 FORMAT(9X,'N1    = ',I3)
2015 FORMAT(9X,'N2    = ',I3)
2020 FORMAT(9X,'R1    = ',F5.1)
2025 FORMAT(9X,'R2    = ',F5.1)
2030 FORMAT(9X,'CL    = ',F5.1)
3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
4000 FORMAT(9X,'IERRTS = ',I4)
4010 FORMAT(9X,'IERRIE = ',I4)
5000 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS: RHO1 .EQ. RHO2')
5010 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS ACCEPTED.')
5020 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS REJECTED.')
6000 FORMAT(9X,'Z(1)= ',F8.4,/,9X,'Z(2)= ',F8.4)
7000 FORMAT(9X,'INTERVAL       = (',D18.10,',',D18.10,')')
     END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3IECD ***
      ** INPUT **
         ** D3TSCD **
         ISWTS =   1
         N1    =  50
         N2    =  40
         R1    =   0.8
         R2    =   0.6
         CL    =  95.0
         ** D3IECD **
         N1    =  50
         N2    =  40
         R1    =   0.8
         R2    =   0.6
         CL    =  95.0
      ** OUTPUT **
         ** D3TSCD **
         IERRTS =    0
         HYPOTHESIS: RHO1 .EQ. RHO2
         HYPOTHESIS IS ACCEPTED.
         Z(1)=   1.8449
         Z(2)=   1.9600
         ** D3IECD **
         IERRIE =    0
         ISWIE =   1
         INTERVAL       = (  0.6082663460D+00,  0.8123376258D+00)
```

6.2.7 D3IESR, R3IESR 単回帰における区間推定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データ $\{x_i,\, y_i\}$ $(1, \cdots, n)$ に関する単回帰式 (または回帰直線)

$$\hat{y}_i = ax_i + b$$

における回帰係数 a, 切片 b, ある特定のデータ x_0 に対する予測値 $\hat{y}_0$ および理論値 $Ax_0 - B$ の信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間を求める. なお, おのおのの x_i に対応する y_i は, 平均 $Ax_i - B$, 分散 σ^2 の正規母集団から抽出された無作為標本であると仮定する.

標本データの回帰係数 a および切片 b は以下の正規方程式から求める.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

信頼区間 (t_1, t_2) は次のように定義される.

(a) 回帰係数

$$t_1 = a - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_a$$

$$t_2 = a + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_a$$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2}}$$

i. 母分散の値が既知の場合

σ^2 : 母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(t)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

σ^2 : 残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}} | n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(b) 切片

$$t_1 = a - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_b$$

$$t_2 = a + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_b$$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

i. 母分散の値が既知の場合

σ^2 : 母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(t)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(c) 予測値

$$t_1 = \hat{y}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_y$$

$$t_2 = \hat{y}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_y$$

ただし,

$$s_y = \sqrt{\sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0-\mu_x)^2}{\sum(x_i-\mu_x)^2}\right]}$$

i. 母分散の値が既知の場合

σ^2：母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(t)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(d) 理論値

$$t_1 = \hat{y}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_0$$

$$t_2 = \hat{y}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s_0$$

ただし,

$$s_0 = \sqrt{\sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\mu_x)^2}{\sum(x_i-\mu_x)^2}\right]}$$

i. 母分散の値が既知の場合

σ^2：母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(t)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3IESR (X, N, Y, YV, X0, CL, T, STAT, ISW1, ISW2, W, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3IESR (X, N, Y, YV, X0, CL, T, STAT, ISW1, ISW2, W, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{ \begin{array}{l} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{array} \right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	X	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N	入 力	標本の独立変数 X の値 $x_i(i=1,n)$
2	N	I	1	入 力	標本のデータ数 n
3	Y	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N	入 力	標本の従属変数 Y の値 $y_i(i=1,n)$
4	YV	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	1	入 力	標本の従属変数 Y の属する母集団の分散 (ISW2 = 1 のとき)
				出 力	残差変動の不偏分散 σ^2 (ISW2 = 2 のとき) (10.2.1 参照)
5	X0	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	1	入 力	予測値または理論値を求めるための x_0 の値 (ISW1 = 1 または ISW1 = 2 の場合は初期設定不要)
6	CL	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
7	T	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	2	出 力	T(1)：信頼区間 (下限) t_1 T(2)：信頼区間 (上限) t_2
8	STAT	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	2	出 力	STAT (1) ：標本の回帰係数 STAT (2) ：標本の切片
9	ISW1	I	1	入 力	統計量の選択スイッチ ISW1=1：回帰係数の信頼区間を求める. ISW1=2：切片の信頼区間を求める. ISW1=3：予測値の信頼区間を求める. ISW1=4：理論値の信頼区間を求める.
10	ISW2	I	1	入 力	分散に関するスイッチ ISW2=1：YV に母集団の分散を入力する. ISW2=2：YV に残差変動の不偏分散を用いる.
11	W	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	29	ワーク	作業領域
12	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $\text{ISW1} \in \{1,2,3,4\}$

(b) $\text{ISW2} \in \{1,2\}$

(c) $\text{N} \geq 3$

(d) $0.0 \leq \text{CL} \leq 100.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	CL=100.0	T(1) に負の最小値, T(2) に正の最大値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
4000	独立変数 X の値の間に差がない.	
4100	残差平方和が 0.0 (10.2.1 参照)	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

大きさ 9 の 1 組の標本データ

x_i	y_i
1	3
2	3
3	5
4	5
5	6
6	7
7	8
8	8
9	9

から回帰係数の信頼度 95% の信頼区間を求める. なお, 標本が属する母集団の分散の値は未知である.

(b) 入力データ

ISW1=1, ISW2=2 N=9, 配列 X, 配列 Y, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3IESR
! *** EXAMPLE OF D3IESR ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER N
      PARAMETER (N=9)
      REAL(8) X(N),Y(N),W(29)
      INTEGER IERR,ISW1,ISW2
      REAL(8) CL,T(2),STAT(2)
      DATA (X(I),I=1,N) &
             /1.0D0, 2.0D0, 3.0D0, 4.0D0, 5.0D0,&
              6.0D0, 7.0D0, 8.0D0, 9.0D0/,&
            (Y(I),I=1,N) &
             /3.0D0, 3.0D0, 5.0D0, 5.0D0, 6.0D0,&
              7.0D0, 8.0D0, 8.0D0, 9.0D0/
!
      ISW1=1
      ISW2=2
      X0=5.0D0
      CL=95.0D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1100)ISW1
      WRITE(6,1150)ISW2
      WRITE(6,2000)N
      WRITE(6,2100)CL
      WRITE(6,2200)X0
```

```
      WRITE(6,2500)
      DO 100 I=1,N
         WRITE(6,2510)I,X(I),Y(I)
  100 CONTINUE
!
      CALL D3IESR(X,N,Y,YV,X0,CL,T,STAT,ISW1,ISW2,W,IERR)
!
      WRITE(6,3000)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,3010)
      WRITE(6,5000) T(1),T(2)
!
!
      WRITE(6,6000) STAT(1)
      WRITE(6,6010) STAT(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3IESR ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 1100 FORMAT(9X,'ISW1= ',I3)
 1150 FORMAT(9X,'ISW2= ',I3)
 2000 FORMAT(9X,'N    = ',I3)
 2100 FORMAT(9X,'CL   = ',F5.1)
 2200 FORMAT(9X,'X0   = ',F5.1)
 2500 FORMAT(9X,'SAMPLE DATA',/,&
             9X,' I',1X,'X(I)',1X,'Y(I)')
 2510 FORMAT(9X,I2,2F5.1)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
 3010 FORMAT(6X,'*** REGRESSION COEFFICIENT ***')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'INTERVAL = (',D18.10,',',D18.10,')')
 6000 FORMAT(9X,'REGRESSION COEFFICIENT OF SAMPLE= ',D18.10)
 6010 FORMAT(9X,'CONSTANT TERM          OF SAMPLE= ',D18.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3IESR ***
      ** INPUT **
         ISW1=   1
         ISW2=   2
         N    =   9
         CL   =  95.0
         X0   =   5.0
         SAMPLE DATA
          I X(I) Y(I)
          1  1.0  3.0
          2  2.0  3.0
          3  3.0  5.0
          4  4.0  5.0
          5  5.0  6.0
          6  6.0  7.0
          7  7.0  8.0
          8  8.0  8.0
          9  9.0  9.0
      ** OUTPUT **
         IERR =    0
      *** REGRESSION COEFFICIENT ***
         INTERVAL = (  0.6578196590D+00,  0.9088470076D+00)
         REGRESSION COEFFICIENT OF SAMPLE=   0.7833333333D+00
         CONSTANT TERM          OF SAMPLE=   0.2083333333D+01
```

6.3 検定

6.3.1 D3TSRA, R3TSRA
1 組の標本における母比率の検定

(1) **機 能**

大きさ n の標本データにおいて, 注目する特性をもつデータの数が m であるとき, この標本データが属する母集団における比率 (母比率) p に関する仮説 $p = p_0$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する. 検定基準は以下のとおり.

(a) 対立仮説が $p \neq p_0$ の場合

$$f_1 = \frac{2(n-m)p_0}{2(m+1)(1-p_0)}$$

$$f_2 = \frac{2m(1-p_0)}{2(n-m+1)p_0}$$

としたとき, $\begin{cases} f_1 \geq F_1 \text{または } f_2 \geq F_2 \text{ならば棄却} \\ f_1 < F_1 \text{かつ } f_2 < F_2 \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(F_1|2(n-m+1), 2m) = 1 - P(F_2|2(m+1), 2(n-m))$$

ここで, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

(b) 対立仮説が $p < p_0$ の場合

$$f_1 = \frac{2(n-m)p_0}{2(m+1)(1-p_0)}$$

としたとき, $\begin{cases} f_1 \geq F_1^* \text{ならば棄却} \\ f_1 < F_1^* \text{ならば採択} \end{cases}$ ただし,

$$\alpha = 1 - P(F_1^*|2(m+1), 2(n-m))$$

ここで, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

(c) 対立仮説が $p > p_0$ の場合

$$f_2 = \frac{2m(1-p_0)}{2(n-m+1)(1-p_0)}$$

としたとき, $\begin{cases} f_2 \geq F_2^* \text{ならば棄却} \\ f_2 < F_2^* \text{ならば採択} \end{cases}$ ただし,

$$\alpha = 1 - P(F_2^*|2(n-m+1), 2m)$$

ここで, $P(F|n_1, n_2)$ は自由度 n_1, n_2 の F 分布の c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3TSRA (N, M, CL, P0, IR, F, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3TSRA (N, M, CL, P0, IR, F, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　 { 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	標本データの数 n
2	M	I	1	入 力	注目している特性を持つ標本の数
3	CL	{D R}	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
4	P0	{D R}	1	入 力	検定する比率の値 p_0
5	IR	I	1	出 力	検定結果 IR=0：仮説 $p=p_0$ を採択 IR=1：仮説 $p=p_0$ を棄却
6	F	{D R}	4	出 力	ISW=1 のとき F (1) ：f_1 の値 F (2) ：f_2 の値 F (3) ：F 分布の値 F_1 F (4) ：F 分布の値 F_2 ISW=2 のとき F (1) ：f_1 の値 F (2) ：F 分布の値 F_1^* の値 ISW=3 のとき F (1) ：f_2 の値 F (2) ：F 分布の値 F_2^* の値
7	ISW	I	1	入 力	対立仮説スイッチ ISW=1：対立仮説が $p \neq p_0$ の場合 ISW=2：対立仮説が $p > p_0$ の場合 ISW=3：対立仮説が $p < p_0$ の場合
8	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{1, 2, 3\}$

(b) N > 0

(c) $0 <$ M $<$ N

(d) $0.0 \leq$ P0 ≤ 1.0

(e) $0.0 \leq$ CL ≤ 100.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	ISW=1 : CL=100.0 ISW=2 または 3 : CL=0.0 または CL=100.0	ISW=1 : F(3), F(4) に 0.0 または正の最大値をセットする. ISW=2 または 3 : F(2) に 0.0 または正の最大値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

大きさ 19 の標本の中で注目している特性を持つ標本の数を 5 とするとき信頼度 95%として母比率 p に関する仮説 $p = 0.5$ を検定する. なお, 対立仮説は $p \neq 0.5$ とする.

(b) 入力データ

ISW=1, N=19, M=5, P=0.5, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3TSRA
! *** EXAMPLE OF D3TSRA ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N,M,IR,ISW
      REAL(8) CL,P0,F(4)
!
      ISW=1
      N=19
      M=5
      P0=0.5D0
      CL=95.0D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N
      WRITE(6,2010) M
      WRITE(6,2020) CL
      WRITE(6,2030) ISW
      WRITE(6,3000)
!
      CALL D3TSRA(N,M,CL,P0,IR,F,ISW,IERR)
!
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) P0
      IF(IR.EQ.0) THEN
         WRITE(6,5010)
      ELSE
         WRITE(6,5020)
      ENDIF
      WRITE(6,6000) F(1),F(3),F(2),F(4)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3TSRA ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N   = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'M   = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'CL  = ',F4.1)
 2030 FORMAT(9X,'ISW = ',I3)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS:  P .EQ.',F5.1)
 5010 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS ACCEPTED.')
```

```
5020 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS REJECTED.')
6000 FORMAT(9X,'F(1) = ',F8.4,2X,'F(3) = ',F8.4,/,&
            9X,'F(2) = ',F8.4,2X,'F(4) = ',F8.4)
     END
```

(d) 出力結果

```
*** D3TSRA ***
 ** INPUT **
    N   =  19
    M   =   5
    CL  = 95.0
    ISW =   1
 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    HYPOTHESIS:  P .EQ.  0.5
    HYPOTHESIS IS ACCEPTED.
    F(1) =   2.3333  F(3) =   2.4484
    F(2) =   0.3333  F(4) =   3.3110
```

6.3.2 D3TSRD, R3TSRD 2 組の独立標本における母比率の差の検定

(1) **機 能**

大きさが n_1, n_2 の 2 組の独立標本データにおいて注目する特性をもつデータの数がそれぞれ m_1, m_2 であるとき, それぞれの標本データが属する母集団における比率 (母比率) p_1, p_2 に関する仮説 $p_1 = p_2$ を信頼度 $1 - \alpha$ で検定する.

2 組の独立標本における標本比率をそれぞれ $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ とする.

$$\hat{p}_1 = \frac{m_1}{n_1}, \hat{p}_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

検定基準は以下のとおり.

(a) 連続性の修正を行わない場合

i. 対立仮説が $p_1 \neq p_2$ の場合

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |z| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $p_1 < p_2$ の場合

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} z \leq -z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z > -z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $p_1 > p_2$ の場合

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} z \geq z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z < z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(b) 連続性の修正を行う場合

i. 対立仮説が $p_1 \neq p_2$ の場合

$$\begin{cases} z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 \geq \hat{p}_2 \text{のとき}) \\ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 < \hat{p}_2 \text{のとき}) \end{cases}$$

として $\begin{cases} |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |z| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $p_1 < p_2$ の場合

$$\begin{cases} z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 \geq \hat{p}_2 \text{のとき}) \\ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 < \hat{p}_2 \text{のとき}) \end{cases}$$

として $\begin{cases} z \leq -z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z > -z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $p_1 > p_2$ の場合

$$\begin{cases} z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 \geq \hat{p}_2 \text{のとき}) \\ z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + 0.5(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} & (\hat{p}_1 < \hat{p}_2 \text{のとき}) \end{cases}$$

として $\begin{cases} z \geq z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z < z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3TSRD (N1, M1, N2, M2, CL, IR, Z, ISW1, ISW2, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3TSRD (N1, M1, N2, M2, CL, IR, Z, ISW1, ISW2, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: 32 ビット整数版では INTEGER(4)、64 ビット整数版では INTEGER(8)

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N1	I	1	入 力	標本データ 1 の数 n_1
2	M1	I	1	入 力	標本データ 1 の中で注目している特性を持つ標本の数 m_1
3	N2	I	1	入 力	標本データ 2 の数 n_2
4	M2	I	1	入 力	標本データ 2 の中で注目している特性を持つ標本の数 m_2
5	CL	{D, R}	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
6	IR	I	1	出 力	検定結果 IR=0：仮説 $p_1 = p_2$ を採択 IR=1：仮説 $p_1 = p_2$ を棄却
7	Z	{D, R}	2	出 力	ISW2=1 のとき Z (1) ：z の値 Z (2) ：標準正規分布の値 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ISW2=2 のとき Z (1) ：z の値 Z (2) ：標準正規分布の値 $-z_{\alpha}$ ISW2=3 のとき Z (1) ：z の値 Z (2) ：標準正規分布の値 z_{α}
8	ISW1	I	1	入 力	処理スイッチ ISW1=1：連続性の修正を行わない ISW1=2：連続性の修正を行う
9	ISW2	I	1	入 力	対立仮説スイッチ ISW2=1：対立仮説が $p \neq p_0$ の場合 ISW2=2：対立仮説が $p > p_0$ の場合 ISW2=3：対立仮説が $p < p_0$ の場合
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW1 $\in \{1, 2\}$

(b) ISW2 $\in \{1, 2, 3\}$

(c) N1 > 0, N2 > 0

(d) $0 < \mathrm{M1} < \mathrm{N1}$, $0 < \mathrm{M2} < \mathrm{N2}$

(e) $0.0 \le \mathrm{CL} \le 100.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	ISW2=1 : CL=100.0 ISW2=2 または 3 : CL=0.0 または CL=100.0	ISW2=1 : Z (2) に正の最大値をセットする. ISW2=2 または 3 : Z (2) に正の最大値または負の最小値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**
なし

(7) **使用例**

(a) 問 題
大きさがそれぞれ 200, 250 の 2 つの独立標本において注目している特性を持つ標本の数がそれぞれ 140, 150 であるとき信頼度 95%としてそれぞれの母比率 p_1, p_2 に関する仮説 $p_1 = p_2$ を連続性の修正を行い検定する. なお, 対立仮説は $p_1 \ne p_2$ とする.

(b) 入力データ
ISW1=2, ISW2=1 N1=200, M1=140, N2=250, M2=150, CL=95.0,

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3TSRD
! *** EXAMPLE OF D3TSRD ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N1,N2,M1,M2,IR,ISW1,ISW2
      REAL(8) CL,Z(2)
!
      ISW1=2
      ISW2=1
      N1=200
      M1=140
      N2=250
      M2=150
      CL=95.0D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) N1
      WRITE(6,2005) M1
      WRITE(6,2010) N2
      WRITE(6,2015) M2
      WRITE(6,2030) CL
      WRITE(6,2040) ISW1
      WRITE(6,2045) ISW2
      WRITE(6,3000)
!
      CALL D3TSRD(N1,M1,N2,M2,CL,IR,Z,ISW1,ISW2,IERR)
!
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000)
      IF(IR.EQ.0) THEN
         WRITE(6,5010)
      ELSE
         WRITE(6,5020)
      ENDIF
      WRITE(6,6000) Z(1),Z(2)
```

```
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3TSRD ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'N1  = ',I3)
 2005 FORMAT(9X,'M1  = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N2  = ',I3)
 2015 FORMAT(9X,'M2  = ',I3)
 2030 FORMAT(9X,'CL  = ',F4.1)
 2040 FORMAT(9X,'ISW1= ',I3)
 2045 FORMAT(9X,'ISW2= ',I3)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS:  P1 .EQ. P2')
 5010 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS ACCEPTED.')
 5020 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS REJECTED.')
 6000 FORMAT(9X,'Z(1) = ',F8.4,2X,'Z(2) = ',F8.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
    *** D3TSRD ***
     ** INPUT **
        N1  = 200
        M1  = 140
        N2  = 250
        M2  = 150
        CL  = 95.0
        ISW1=   2
        ISW2=   1
     ** OUTPUT **
        IERR =    0
        HYPOTHESIS:  P1 .EQ. P2
        HYPOTHESIS IS REJECTED.
        Z(1) =   2.1030  Z(2) =   1.9600
```

6.3.3 D3TSME, R3TSME 1 組の標本における母平均の検定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データの平均値 μ_x および分散値 (または母分散値) σ^2 から, 母集団の平均値 (母平均)μ に関する仮説 $\mu = \mu_0$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する. 検定基準は以下のとおり.

(a) 母分散の値が既知の場合

i. 対立仮説が $\mu \neq \mu_0$ の場合

$$z = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

として $\begin{cases} |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |z| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

σ^2 : 母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $\mu < \mu_0$ の場合

$$z = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

として $\begin{cases} z \leq -z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z > -z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

σ^2 : 母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $\mu > \mu_0$ の場合

$$z = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

として $\begin{cases} z \geq z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z < z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

σ^2 : 母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(b) 母分散の値が未知の場合

i. 対立仮説が $\mu \neq \mu_0$ の場合

$$t = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

σ^2：母分散の不偏推定値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $\mu < \mu_0$ の場合

$$t = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

として $\begin{cases} t \le -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t > -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

σ^2：母分散の不偏推定値

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n-1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $\mu > \mu_0$ の場合

$$t = \frac{\mu_x - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

として $\begin{cases} t \ge t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

σ^2：母分散の不偏推定値

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n-1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3TSME (N, XE, XV, CL, XI, IR, Z, ISW1, ISW2, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3TSME (N, XE, XV, CL, XI, IR, Z, ISW1, ISW2, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4)
64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	標本データの数 n
2	XE	{D, R}	1	入 力	標本データの平均 $\bar{x}$
3	XV	{D, R}	1	入 力	標本データまたは母集団の分散 σ^2
4	CL	{D, R}	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
5	XI	{D, R}	1	入 力	検定する母平均の値 μ_0
6	IR	I	1	出 力	検定結果 IR=0：仮説 $\mu = \mu_0$ を採択 IR=1：仮説 $\mu = \mu_0$ を棄却
7	Z	{D, R}	2	出 力	ISW2=1 のとき Z (1) ：z または t の値 Z (2) ：正規分布の値 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ または t 分布の値 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ ISW2=2 のとき Z (1) ：z または t の値 Z (2) ：正規分布の値 $-z_\alpha$ または t 分布の値 $-t_\alpha$ ISW2=3 のとき Z (1) ：z または t の値 Z (2) ：正規分布の値 z_α または t 分布の値 t_α
8	ISW1	I	1	入 力	分散に関するスイッチ ISW1=1：XV に母集団の分散を入力する ISW1=2：XV に標本データの分散 (不偏推定値ではない) を入力する ISW1=3：XV に標本データの分散 (不偏推定値) を入力する
9	ISW2	I	1	入 力	対立仮説スイッチ ISW2=1：対立仮説が $\mu \neq \mu_0$ の場合 ISW2=2：対立仮説が $\mu > \mu_0$ の場合 ISW2=3：対立仮説が $\mu < \mu_0$ の場合
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW1 $\in \{1, 2, 3\}$

(b) ISW2 $\in \{1, 2, 3\}$

(c) N ≥ 2

(d) XV > 0.0

(e) $0.0 \leq$ CL ≤ 100.0

(5) **エラーインディケータ**

<table>
<tr><th>IERR の値</th><th>意　　味</th><th>処　理　内　容</th></tr>
<tr><td>0</td><td>正常終了.</td><td></td></tr>
<tr><td>1000</td><td>ISW2=1 :
CL=100.0
ISW2=2 または 3 :
CL=0.0 または CL=100.0</td><td>ISW2=1 :
Z (2) に正の最大値をセットする.
ISW2=2 または 3 :
Z (2) に正の最大値または負の最小値をセットする.</td></tr>
<tr><td>3000</td><td>制限条件 (a) を満足しなかった.</td><td rowspan="5">処理を打ち切る.</td></tr>
<tr><td>3010</td><td>制限条件 (b) を満足しなかった.</td></tr>
<tr><td>3020</td><td>制限条件 (c) を満足しなかった.</td></tr>
<tr><td>3030</td><td>制限条件 (d) を満足しなかった.</td></tr>
<tr><td>3040</td><td>制限条件 (e) を満足しなかった.</td></tr>
</table>

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

標本データ数が 10 個で, 標本平均が 20.54, 母分散が 0.08 のとき, 信頼度 95%として母平均に関する仮説 $\mu = 20.52$ を検定する. なお, 対立仮説は $\mu \neq 20.52$ とする.

(b) 入力データ

ISW1=1, ISW2=1, N=10, XE=20.54, XV=0.08 XI=20.52, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3TSME
! *** EXAMPLE OF D3TSME ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N,ISW1,ISW2,IR
      REAL(8) XE,XV,CL,XI,Z(2)
!
      ISW1=1
      ISW2=1
      N=10
      XE=20.54D0
      XV=0.08D0
      XI=20.52D0
      CL=95.0D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1100) ISW1
      WRITE(6,1200) ISW2
      WRITE(6,2010) N
      WRITE(6,2020) XE
      WRITE(6,2030) XV
      WRITE(6,2040) CL
      WRITE(6,3000)
!
      CALL D3TSME(N,XE,XV,CL,XI,IR,Z,ISW1,ISW2,IERR)
```

```
!
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XI
      IF(IR.EQ.0) THEN
         WRITE(6,5010)
      ELSE
         WRITE(6,5020)
      ENDIF
      WRITE(6,6000) Z(1),Z(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3TSME ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 1100 FORMAT(9X,'ISW1= ',I3)
 1200 FORMAT(9X,'ISW2= ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N    = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'XE   = ',F6.2)
 2030 FORMAT(9X,'XV   = ',F6.2)
 2040 FORMAT(9X,'CL   = ',F6.2)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS:  MU .EQ.',F6.2)
 5010 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS ACCEPT.')
 5020 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS REJECT.')
 6000 FORMAT(9X,'Z(1)= ',F8.4,/,9X,'Z(2)= ',F8.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3TSME ***
      ** INPUT **
         ISW1=   1
         ISW2=   1
         N    =  10
         XE   =  20.54
         XV   =   0.08
         CL   =  95.00
      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         HYPOTHESIS:  MU .EQ. 20.52
         HYPOTHESIS IS ACCEPT.
         Z(1)=   0.2236
         Z(2)=   1.9600
```

6.3.4 D3TSSU, R3TSSU 2 組の独立標本における母平均の差の検定

(1) **機 能**

大きさがそれぞれ n_1, n_2 の 2 組の独立標本データのそれぞれの平均値 μ_{x_1}, μ_{x_2} および分散値 (または母分散値) σ_1^2, σ_2^2 から, それぞれの標本が属している母集団の平均値 μ_1, μ_2 に関する仮説 $\mu_1 = \mu_2$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する. 検定基準は以下のとおり.

(a) 2 組の母分散の値が既知の場合

i. 対立仮説が $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合

$$z = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

として $\begin{cases} |z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |z| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の値

ii. 対立仮説が $\mu_1 < \mu_2$ の場合

$$z = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

として $\begin{cases} z \leq -z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z > -z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の値

iii. 対立仮説が $\mu_1 > \mu_2$ の場合

$$z = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

として $\begin{cases} z \geq z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ z < z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の値

(b) 2 組の母分散の値が等しくその値が未知の場合

i. 対立仮説が $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{s_p^2(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}$$
$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n_1+n_2-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

ii. 対立仮説が $\mu_1 < \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} t \leq -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t > -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}$$
$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n_1+n_2-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

iii. 対立仮説が $\mu_1 > \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

として $\begin{cases} t \geq t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}$$
$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n_1+n_2-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

(c) 2 組の母分散の値が等しくなくその値が未知の場合

i. 対立仮説が $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$
$$t^*_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\beta_1 t^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}} + \beta_2 t^{(2)}_{\frac{\alpha}{2}}}{\beta_1 + \beta_2}$$

として, $\begin{cases} |t| \geq t^*_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t^*_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}}|n_1-1) = 1 - P(t^{(2)}_{\frac{\alpha}{2}}|n_2-1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

ii. 対立仮説が $\mu_1 < \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$t_\alpha^* = \frac{\beta_1 t_\alpha^{(1)} + \beta_2 t_\alpha^{(2)}}{\beta_1 + \beta_2}$$

として，$\begin{cases} t \le -t_\alpha^* \text{ならば棄却} \\ t > -t_\alpha^* \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha^{(1)}|n_1 - 1) = 1 - P(t_\alpha^{(2)}|n_2 - 1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

iii. 対立仮説が $\mu_1 > \mu_2$ の場合

$$t = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$t_\alpha^* = \frac{\beta_1 t_\alpha^{(1)} + \beta_2 t_\alpha^{(2)}}{\beta_1 + \beta_2}$$

として，$\begin{cases} t \ge t_\alpha^* \text{ならば棄却} \\ t < t_\alpha^* \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha^{(1)}|n_1 - 1) = 1 - P(t_\alpha^{(2)}|n_2 - 1)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

$$\beta_1 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}, \beta_2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 : 2 組の母分散の不偏推定値

(2) 使用法

倍精度サブルーチン:

CALL D3TSSU (N1, XE1, XV1, N2, XE2, XV2, CL, IR, Z, ISW1, ISW2, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3TSSU (N1, XE1, XV1, N2, XE2, XV2, CL, IR, Z, ISW1, ISW2, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N1	I	1	入 力	標本データの数 n_1
2	XE1	$\left\{\begin{array}{c} D \\ R \end{array}\right\}$	1	入 力	標本データの平均 μ_{x_1}
3	XV1	$\left\{\begin{array}{c} D \\ R \end{array}\right\}$	1	入 力	標本データまたは母集団の分散 ${\sigma_1}^2$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　　容
4	N2	I	1	入 力	標本データの数 n_2
5	XE2	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	1	入 力	標本データの平均 μ_{x_2}
6	XV2	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	1	入 力	標本データまたは母集団の分散 ${\sigma_2}^2$
7	CL	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
8	IR	I	1	出 力	検定結果 IR=0：仮説 $\mu_1 = \mu_2$ を採択 IR=1：仮説 $\mu_1 = \mu_2$ を棄却
9	Z	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	2	出 力	ISW2=1 のとき Z (1) ：z または t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ または t 分布の値 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ または $t^*_{\frac{\alpha}{2}}$ ISW2=2 のとき Z (1) ：z または t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 $-z_\alpha$ または t 分布の値 $-t_\alpha$ または $-t^*_\alpha$ ISW2=3 のとき Z (1) ：z または t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 z_α または t 分布の値 t_α または t^*_α
10	ISW1	I	1	入 力	分散に関するスイッチ ISW1=1：XV1, XV2 に 2 組の母分散を入力する ISW1=2：2 組の母分散が等しく，XV1, XV2 に標本データの分散 (不偏推定値でない) を入力する ISW1=3：2 組の母分散が等しく，XV1, XV2 に標本データの分散 (不偏推定値) を入力する ISW1=4：2 組の母分散が等しくなく，XV1, XV2 に標本データの分散 (不偏推定値でない) を入力する ISW1=5：2 組の母分散が等しくなく，XV1, XV2 に標本データの分散 (不偏推定値) を入力する
11	ISW2	I	1	入 力	対立仮説スイッチ ISW2=1：対立仮説が $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合 ISW2=2：対立仮説が $\mu_1 < \mu_2$ の場合 ISW2=3：対立仮説が $\mu_1 > \mu_2$ の場合
12	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW1 $\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) ISW2 $\in \{1, 2, 3\}$

(c) N1$\geq$ 2, N2$\geq$ 2

(d) XV1$\geq$ 0.0, XV2$\geq$ 0.0

(e) 0.0 $\leq$ CL $\leq$ 100.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	ISW2=1 : CL=100.0 ISW2=2 または 3 : CL=0.0 または CL=100.0	ISW2=1 : Z (2) に正の最大値をセットする. ISW2=2 または 3 : Z (2) に正の最大値または負の最小値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**
なし

(7) **使用例**

(a) 問 題
標本データ数, 平均, 母分散がそれぞれ 20, 62.0, 64.0 と 25, 67.0, 81.0 である 2 組の独立な標本から信頼度 95%としてそれぞれの母平均 μ_1, μ_2 に関する仮説 $\mu_1 = \mu_2$ を検定する. なお, 対立仮説は $\mu_1 \neq \mu_2$ とする.

(b) 入力データ
ISW1=1, ISW2=1, N1=20, XE1=62.0, XV1=64.0, N2=25, XE2=67.0, XV2=81.0, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3TSSU
! *** EXAMPLE OF D3TSSU ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N1,N2,ISW1,ISW2,IR
      REAL(8) XE1,XE2,XV1,XV2,CL,Z(2)
!
      ISW1=1
      ISW2=1
      N1=20
      XE1=62.0D0
      XV1=64.0D0
      N2=25
      XE2=67.0D0
      XV2=81.0D0
      CL=95.0D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) ISW1
      WRITE(6,2005) ISW2
      WRITE(6,2010) N1
      WRITE(6,2020) XE1
      WRITE(6,2030) XV1
      WRITE(6,2015) N2
      WRITE(6,2025) XE2
```

```
      WRITE(6,2035) XV2
      WRITE(6,2050) CL
      WRITE(6,3000)
!
      CALL D3TSSU(N1,XE1,XV1,N2,XE2,XV2,CL,IR,Z,ISW1,ISW2,IERR)
!
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000)
      IF(IR.EQ.0) THEN
         WRITE(6,5010)
      ELSE
         WRITE(6,5020)
      ENDIF
      WRITE(6,6000) Z(1),Z(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3TSSU ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'ISW1= ',I3)
 2005 FORMAT(9X,'ISW2= ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N1  = ',I3)
 2015 FORMAT(9X,'N2  = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'XE1 = ',F4.1)
 2025 FORMAT(9X,'XE2 = ',F4.1)
 2030 FORMAT(9X,'XV1 = ',F4.1)
 2035 FORMAT(9X,'XV2 = ',F4.1)
 2050 FORMAT(9X,'CL  = ',F4.1)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS: MU1 .EQ. M2')
 5010 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS ACCEPTED.')
 5020 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS REJECTED.')
 6000 FORMAT(9X,'Z(1)= ',F10.4,/,9X,'Z(2)= ',F10.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3TSSU ***
      ** INPUT **
         ISW1=   1
         ISW2=   1
         N1  =  20
         XE1 = 62.0
         XV1 = 64.0
         N2  =  25
         XE2 = 67.0
         XV2 = 81.0
         CL  = 95.0
      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         HYPOTHESIS: MU1 .EQ. M2
         HYPOTHESIS IS REJECTED.
         Z(1)=    -1.9703
         Z(2)=     1.9600
```

6.3.5 D3TSVA, R3TSVA
1 組の標本における母分散の検定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データの分散値 (母分散の不偏推定値)s^2 から, 母分散値 σ^2 に関する仮説 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する. 検定基準は以下のとおり.

(a) 対立仮説が $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ の場合

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

として $\begin{cases} \chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{または} \chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}|n-1) = P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}|n-1)$$

ここで $P(\chi^2|n)$ は自由度 n の χ^2 分布の c.d.f. の値

s^2 : 母分散の不偏推定値

(b) 対立仮説が $\sigma^2 < \sigma_0^2$ の場合

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

として $\begin{cases} \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha} \text{ならば棄却} \\ \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\alpha = P(\chi^2_{1-\alpha}|n-1)$$

ここで $P(\chi^2|n)$ は自由度 n の χ^2 分布の c.d.f. の値

s^2 : 母分散の不偏推定値

(c) 対立仮説が $\sigma^2 > \sigma_0^2$ の場合

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

として $\begin{cases} \chi^2 \geq \chi^2_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ \chi^2 < \chi^2_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$\alpha = P(\chi^2_{\alpha}|n-1)$$

ここで $P(\chi^2|n)$ は自由度 n の χ^2 分布の c.d.f. の値

s^2 : 母分散の不偏推定値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3TSVA (N, XV, CL, XI, IR, Z, ISW1, ISW2, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3TSVA (N, XV, CL, XI, IR, Z, ISW1, ISW2, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型
I: $\begin{Bmatrix} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{Bmatrix}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内 容
1	N	I	1	入 力	標本データの数 n
2	XV	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	1	入 力	標本データの分散 s^2
3	CL	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
4	XI	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	1	入 力	検定する分散の値 σ_0
5	IR	I	1	出 力	検定結果 IR=0：仮説 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ を採択 IR=1：仮説 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ を棄却
6	Z	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	3	出 力	Z (1) ：χ^2 の値 Z (2) ：χ^2 分布の値 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ Z (3) ：χ^2 分布の値 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$
7	ISW1	I	1	入 力	ISW1=1：XV に標本データの分散 (不偏推定値でない) を入力する ISW1=2：XV に標本データの分散 (不偏推定値) を入力する
8	ISW2	I	1	入 力	対立仮説スイッチ ISW2=1：対立仮説が $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ の場合 ISW2=2：対立仮説が $\sigma^2 < \sigma_0^2$ の場合 ISW2=3：対立仮説が $\sigma^2 > \sigma_0^2$ の場合
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{ISW1} \in \{1, 2\}$

(b) $\mathrm{ISW2} \in \{1, 2, 3\}$

(c) $\mathrm{N} \geq 2$

(d) $\mathrm{XV} > 0.0$

(e) $\mathrm{XI} > 0.0$

(f) $0.0 \leq \mathrm{CL} \leq 100.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	ISW2=1： CL=100.0 ISW2=2 または 3： CL=0.0 または CL=100.0	ISW2=1： Z (2) に正の最大値をセットする. ISW2=2 または 3： Z (2) に 0.0 または正の最大値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

標本データ数が 25 個で, 標本分散 (不偏推定値) が 182.25 のとき信頼度 95% として母分散 σ^2 に関する仮説 $\sigma^2 = 100.0$ を検定する. なお, 対立仮説は $\sigma^2 \neq 100.0$ とする.

(b) 入力データ

ISW1=2, ISW2=1, N=25, XV=182.25, XI=100.0, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3TSVA
! *** EXAMPLE OF D3TSVA ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER IERR
      INTEGER N,ISW1,ISW2,IR
      REAL(8) XV,CL,XI,Z(3)
!
      ISW1=2
      ISW2=1
      N=25
      XV=182.25
      XI=100
      CL=95
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,2000) ISW1
      WRITE(6,2005) ISW2
      WRITE(6,2010) N
      WRITE(6,2030) XV
      WRITE(6,2040) CL
      WRITE(6,3000)
!
      CALL D3TSVA(N,XV,CL,XI,IR,Z,ISW1,ISW2,IERR)
!
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) XI
      IF(IR.EQ.0) THEN
         WRITE(6,5010)
      ELSE
         WRITE(6,5020)
      ENDIF
      WRITE(6,6000) Z(1),Z(2),Z(3)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3TSVA ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 2000 FORMAT(9X,'ISW1= ',I3)
 2005 FORMAT(9X,'ISW2= ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N    = ',I3)
 2030 FORMAT(9X,'XV   = ',F9.4)
 2040 FORMAT(9X,'CL   = ',F9.4)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
```

```
4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
5000 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS:  SIGMA2 .EQ.',F5.1)
5010 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS ACCEPTED.')
5020 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS REJECTED.')
6000 FORMAT(9X,'Z(1)= ',F8.4,/,&
            9X,'Z(2)= ',F8.4,2X,'Z(3)= ',F8.4)
     END
```

(d) 出力結果

```
*** D3TSVA ***
 ** INPUT **
    ISW1=   2
    ISW2=   1
    N   =  25
    XV  =  182.2500
    CL  =   95.0000
 ** OUTPUT **
    IERR =    0
    HYPOTHESIS:  SIGMA2 .EQ.100.0
    HYPOTHESIS IS REJECTED.
    Z(1)=  43.7400
    Z(2)=  39.3641  Z(3)=  12.4012
```

6.3.6 D3TSTC, R3TSTC 1 組の標本における母相関係数の検定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データの標本相関係数 r から母集団の相関係数 (母相関係数) ρ に関する仮説 $\rho = \rho_0$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する．検定基準は以下のとおり．

(a) 仮説: $\rho = 0$

i. 対立仮説が $\rho \neq 0$ の場合

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} ならば棄却 \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} ならば採択 \end{cases}$

ただし，

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $\rho < 0$ の場合

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

として $\begin{cases} t \geq -t_{\alpha} ならば棄却 \\ t < -t_{\alpha} ならば採択 \end{cases}$

ただし，

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\alpha}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $\rho > 0$ の場合

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

として $\begin{cases} t \geq t_{\alpha} ならば棄却 \\ t < t_{\alpha} ならば採択 \end{cases}$

ただし，

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\alpha}|n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布の c.d.f. の値

(b) 仮説: $\rho = \rho_0$

i. 対立仮説が $\rho \neq \rho_0$ の場合

$$t = (z - z_0)\sqrt{n-3}$$

として $\begin{cases} |t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} ならば棄却 \\ |t| < z_{\frac{\alpha}{2}} ならば採択 \end{cases}$

ただし，

$$z = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r}{1-r}$$

$$z_0 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

ii. 対立仮説が $\rho < \rho_0$ の場合

$$t = (z - z_0)\sqrt{n-3}$$

として $\begin{cases} t \leq -z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t > -z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$z = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r}{1-r}$$

$$z_0 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は自由度 n の標準正規分布の c.d.f. の値

iii. 対立仮説が $\rho > \rho_0$ の場合

$$t = (z - z_0)\sqrt{n-3}$$

として $\begin{cases} t \geq z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$z = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+r}{1-r}$$

$$z_0 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は自由度 n の標準正規分布の c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3TSTC (N, R, CL, R0, IR, Z, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3TSTC (N, R, CL, R0, IR, Z, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　 { 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	N	I	1	入 力	2 つの標本のデータ数 n
2	R	{D R}	1	入 力	1 組の標本の標本相関係数 r (注意事項 (a) 参照)
3	CL	{D R}	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)$
4	R0	{D R}	1	入 力	検定する相関係数の値 ρ_0
5	IR	I	1	出 力	検定結果 IR=0 : 仮説 $\rho=\rho_0$ を採択 IR=1 : 仮説 $\rho=\rho_0$ を棄却
6	Z	{D R}	2	出 力	ISW=1 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：t 分布の値 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ または標準正規分布の値 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ISW=2 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：t 分布の値 $-t_\alpha$ または標準正規分布の値 $-z_\alpha$
7	ISW	I	1	入 力	対立仮説スイッチ ISW=1 : 対立仮説が $\rho\neq\rho_0$ の場合 ISW=2 : 対立仮説が $\rho<\rho_0$ の場合 ISW=3 : 対立仮説が $\rho>\rho_0$ の場合
8	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW $\in \{1, 2, 3\}$

(b) N$\geq$4

(c) $-1.0 <$ R < 1.0

(d) $-1.0 <$ R0 < 1.0

(e) $0.0 \leq$ CL ≤ 100.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	ISW=1 : CL=100.0 ISW=2 または 3 : CL=0.0 または CL=100.0	ISW=1 : Z (2) に正の最大値をセットする. ISW=2 または 3 : Z (2) に正の最大値または負の最小値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) n 個のデータからなる 1 組の標本 $\{x_i, y_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ の標本相関係数 r は, 次の式によって与えられる.
(4.4.1 $\left\{\begin{matrix}\text{D2CCMT}\\ \text{R2CCMT}\end{matrix}\right\}$ 参照)

$$r = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

大きさ 10 の 1 組の標本データ

x_i	y_i
10.129	63.4
12.611	60.1
13.900	57.2
16.532	46.5
20.822	43.9
26.025	39.6
28.283	39.7
29.199	39.1
30.766	37.8
32.664	27.8

について信頼度 95%として母相関係数に関する仮説 $\rho = 0.0$ を検定する. なお, 対立仮説は $\rho \neq 0.0$ とする.

(b) 入力データ

N=10, R0=0.0, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3TSTC
! *** EXAMPLE OF D3TSTC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER N
      PARAMETER (N=10)
      INTEGER M
      PARAMETER (M=2)
      REAL(8) X(N,2),X1(M),WK(M),RR(N,M)
      INTEGER IERR,ISW,IR,NS
      REAL(8) R,R0,CL,Z(2)
      DATA (X(I,1),I=1,N)&
            /10.129D0, 12.611D0, 13.900D0, 16.532D0, 20.822D0,&
             26.025D0, 28.283D0, 29.199D0, 30.766D0, 32.664D0/,&
           (X(I,2),I=1,N) &
            /63.4D0, 60.1D0, 57.2D0, 46.5D0, 43.9D0,&
             39.6D0, 39.7D0, 39.1D0, 37.8D0, 37.8D0/
!
      ISW=1
      R0=0.0D0
      CL=95.0D0
!
      CALL D2CCMT(X,N,N,M,NS,X1,RR,N,0,WK,IERR)
      R=RR(1,2)
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1100) ISW
      WRITE(6,2010) N
      WRITE(6,2020) R
      WRITE(6,2030) CL
      WRITE(6,2100)
      DO 100 I=1,N
         WRITE(6,2110)I,X(I,1),X(I,2)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,3000)
!
      CALL D3TSTC(N,R,CL,R0,IR,Z,ISW,IERR)
!
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,5000) R0
      IF(IR.EQ.0) THEN
         WRITE(6,5010)
      ELSE
         WRITE(6,5020)
      ENDIF
      WRITE(6,6000) Z(1),Z(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3TSTC ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 1100 FORMAT(9X,'ISW = ',I3)
 2010 FORMAT(9X,'N   = ',I3)
 2020 FORMAT(9X,'R   = ',F5.1)
 2030 FORMAT(9X,'CL  = ',F5.1)
 2100 FORMAT(9X,'NO.',1X,'SAMPLE1',1X,'SAMPLE2')
 2110 FORMAT(9X,I3,2F8.3)
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS:  RHO .EQ.',F5.1)
 5010 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS ACCEPTED.')
 5020 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS REJECTED.')
 6000 FORMAT(9X,'Z(1)= ',F8.4,/,9X,'Z(2)= ',F8.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
     *** D3TSTC ***
      ** INPUT **
         ISW =   1
         N   =  10
         R   =  -0.9
         CL  =  95.0
         NO. SAMPLE1 SAMPLE2
           1  10.129  63.400
           2  12.611  60.100
           3  13.900  57.200
           4  16.532  46.500
           5  20.822  43.900
           6  26.025  39.600
           7  28.283  39.700
           8  29.199  39.100
           9  30.766  37.800
          10  32.664  37.800
      ** OUTPUT **
         IERR =    0
         HYPOTHESIS:  RHO .EQ.  0.0
         HYPOTHESIS IS REJECTED.
         Z(1)=  -8.1519
         Z(2)=   2.3060
```

6.3.7 D3TSCD, R3TSCD
2 組の独立標本における母相関係数の差の検定

(1) **機 能**

大きさがそれぞれ n_1, n_2 の 2 組の独立標本データの標本相関係数 r_1, r_2 からそれぞれの標本が属している母集団の相関係数 (母相関係数) ρ_1, ρ_2 に関する仮説 $\rho_1 = \rho_2$ を信頼度 $1-\alpha$ で検定する．検定基準は以下のとおり．

(a) 対立仮説が $\rho_1 \neq \rho_2$ の場合

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1 - 3} + \dfrac{1}{n_2 - 3}}}$$

として $\begin{cases} |t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1 + r_1}{1 - r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1 + r_2}{1 - r_2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(b) 対立仮説が $\rho_1 < \rho_2$ の場合

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1 - 3} + \dfrac{1}{n_2 - 3}}}$$

として $\begin{cases} t \leq -z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ t > -z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1 + r_1}{1 - r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1 + r_2}{1 - r_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(c) 対立仮説が $\rho_1 > \rho_2$ の場合

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1 - 3} + \dfrac{1}{n_2 - 3}}}$$

として $\begin{cases} t \geq z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ t < z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし，

$$z_1 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1 + r_1}{1 - r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\log_e \frac{1 + r_2}{1 - r_2}$$

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布の c.d.f. の値

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D3TSCD (N1, R1, N2, R2, CL, IR, Z, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3TSCD (N1, R1, N2, R2, CL, IR, Z, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	N1	I	1	入 力	第 1 の標本データの数 n_1
2	R1	{D R}	1	入 力	第 1 の標本データの相関係数 r_1 (注意事項 (a) 参照)
3	N2	I	1	入 力	第 2 の標本データの数 n_2
4	R2	{D R}	1	入 力	第 2 の標本データの相関係数 r_2 (注意事項 (a) 参照)
5	CL	{D R}	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)$
6	IR	I	1	出 力	検定結果 IR=0 : 仮説 $\rho_1 = \rho_2$ を採択 IR=1 : 仮説 $\rho_1 = \rho_2$ を棄却
7	Z	{D R}	2	出 力	ISW=1 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ISW=2 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 $-z_\alpha$ ISW=3 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 z_α
8	ISW	I	1	入 力	対立仮説スイッチ ISW=1 : 対立仮説が $\rho_1 \neq \rho_2$ の場合 ISW=2 : 対立仮説が $\rho_1 < \rho_2$ の場合 ISW=3 : 対立仮説が $\rho_1 > \rho_2$ の場合
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $\in \{1, 2, 3\}$

(b) N1 ≥ 4, N2 ≥ 4

(c) $-1.0 <$ R1 < 1.0, $-1.0 <$ R2 < 1.0

(d) $0.0 \leq$ CL ≤ 100.0

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	ISW=1 : CL=100.0 ISW=2 または 3 : CL=0.0 または CL=100.0	ISW=1 : Z (2) に正の最大値をセットする. ISW=2 または 3 : Z (2) に正の最大値または負の最小値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) 注意事項

(a) n 個のデータからなる 1 組の標本 $\{x_i, y_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ の標本相関係数 r は, 次の式によって与えられる.
(4.4.1 $\left\{\begin{array}{l}\text{D2CCMT}\\ \text{R2CCMT}\end{array}\right\}$ 参照)

$$r = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2}\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2}}$$

(7) 使用例

6.2.6 (7) 使用例参照.

6.3.8 D3TSSR, R3TSSR 単回帰における検定

(1) **機 能**

大きさ n の 1 組の標本データ $\{x_i, y_i\}$ $(1, \cdots, n)$ に関する単回帰式 (または回帰直線)

$$\hat{y}_i = ax_i + b$$

における回帰係数 a, 切片 b から母集団の回帰係数 A および切片 B に関する仮説を信頼度 $1-\alpha$ で検定する.
なお, おのおのの x_i に対応する y_i は, 平均 $Ax_i - B$, 分散 σ^2 の正規母集団から抽出された無作為標本であると仮定する.
標本データの回帰係数 a および切片 b は以下の正規方程式から求める.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

検定基準は以下のとおり.

(a) 回帰係数

仮説: $A = A_0$

i. 母分散の値が既知の場合

A. 対立仮説が $A \neq A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} |t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2 : 母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

B. 対立仮説が $A < A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} t \geq -z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < -z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2 : 母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

C. 対立仮説が $A > A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} t \geq z_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < z_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2：母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_\alpha)$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

A. 対立仮説が $A < A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}}|n - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

B. 対立仮説が $A < A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} t \geq -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

C. 対立仮説が $A > A_0$ の場合

$$t = \frac{a - A_0}{s_a}$$

として $\begin{cases} t \geq t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_a = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \mu_x)^2}}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha|n - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(b) 切片

仮説: $B = B_0$

i. 母分散の値が既知の場合

A. 対立仮説が $B \neq B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} |t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

σ^2：母分散の値

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(z_{\frac{\alpha}{2}})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

B. 対立仮説が $B < B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} t \geq -z_{\alpha} \text{ならば棄却} \\ t < -z_{\alpha} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

σ^2：母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

C. 対立仮説が $B > B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} t \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ t < z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

σ^2：母分散の値

$$\alpha = 1 - P(z_{\alpha})$$

ここで $P(z)$ は標準正規分布 c.d.f. の値

ii. 母分散の値が未知の場合

A. 対立仮説が $B \neq B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ |t| < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - P(t_{\frac{\alpha}{2}} | n - 2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

B. 対立仮説が $B < B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} t \geq -t_\alpha \text{ならば棄却} \\ t < -t_\alpha \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha | n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

C. 対立仮説が $B > B_0$ の場合

$$t = \frac{b - B_0}{s_b}$$

として $\begin{cases} t \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば棄却} \\ t < t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ならば採択} \end{cases}$

ただし,

$$s_b = \sqrt{\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\mu_x^2}{\sum (x_i - \mu_x)^2} \right]}$$

σ^2：残差変動の不偏分散

$$\alpha = 1 - P(t_\alpha | n-2)$$

ここで $P(t|n)$ は自由度 n の t 分布 c.d.f. の値

(2) 使用法

倍精度サブルーチン:

CALL D3TSSR (X, N, Y, YV, X0, CL, IR, Z, STAT, ISW1, ISW2, ISW3, W, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R3TSSR (X, N, Y, YV, X0, CL, IR, Z, STAT, ISW1, ISW2, ISW3, W, IERR)

(3) 引数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\begin{Bmatrix} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{Bmatrix}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	X	$\begin{Bmatrix} \text{D} \\ \text{R} \end{Bmatrix}$	N	入 力	標本の独立変数 X の値 $x_i (i = 1, n)$
2	N	I	1	入 力	標本のデータ数 n
3	Y	$\begin{Bmatrix} \text{D} \\ \text{R} \end{Bmatrix}$	N	入 力	標本の従属変数 Y の値 $y_i (i = 1, n)$
4	YV	$\begin{Bmatrix} \text{D} \\ \text{R} \end{Bmatrix}$	1	入 力	標本の従属変数 Y の属する母集団の分散 (ISW2=1 のとき) (10.2.1 参照)
				出 力	残差変動の不偏分散 σ^2 (ISW2=2 のとき)

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
5	X0	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	ISW1=1 のとき 検定するための回帰係数 A_0 ISW1=2 のとき 検定するための切片 B_0
6	CL	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	1	入 力	信頼度 $100(1-\alpha)(\%)$
7	IR	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	1	出 力	検定結果 ISW1=1 のとき IR=0：仮説 $A=A_0$ を採択 IR=1：仮説 $A=A_0$ を棄却 ISW1=2 のとき IR=0：仮説 $B=B_0$ を採択 IR=1：仮説 $B=B_0$ を棄却
8	Z	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	2	出 力	ISW2=1, ISW3=1 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ISW2=1, ISW3=2 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 $-z_\alpha$ ISW2=1, ISW3=3 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：標準正規分布の値 z_α ISW2=2, ISW3=1 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：t 分布の値 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ ISW2=2, ISW3=2 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：t 分布の値 $-t_\alpha$ ISW2=2, ISW3=3 のとき Z (1) ：t の値 Z (2) ：t 分布の値 t_α
9	STAT	$\begin{Bmatrix}\text{D}\\\text{R}\end{Bmatrix}$	2	出 力	STAT (1) ：標本の回帰係数 STAT (2) ：標本の切片
10	ISW1	I	1	入 力	統計量の選択スイッチ ISW1=1：回帰係数の検定 ISW1=2：切片の検定
11	ISW2	I	1	入 力	分散に関するスイッチ ISW2=1：YV に母集団の分散を入力する． ISW2=2：YV に残差変動の不偏分散を用いる．

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
12	ISW3	I	1	入 力	対立仮説スイッチ ISW1=1 のとき ISW3=1 : 対立仮説が $A \neq A_0$ の場合 ISW3=2 : 対立仮説が $A < A_0$ の場合 ISW3=3 : 対立仮説が $A > A_0$ の場合 ISW1=2 のとき ISW3=1 : 対立仮説が $B \neq B_0$ の場合 ISW3=2 : 対立仮説が $B < B_0$ の場合 ISW3=3 : 対立仮説が $B > B_0$ の場合
13	W	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	29	ワーク	作業領域
14	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW1 $\in \{1, 2\}$

(b) ISW2 $\in \{1, 2\}$

(c) ISW3 $\in \{1, 2, 3\}$

(d) N ≥ 3

(e) $0.0 \leq$ CL ≤ 100.0

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	ISW3=1 : CL=100.0 ISW3=2 または 3 : CL=0.0 または CL=100.0	ISW3=1 : Z (2) に正の最大値をセットする. ISW3=2 または 3 : Z (2) に正の最大値または負の最小値をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	
4000	独立変数 X の値の間に差がない.	
4100	残差平方和が 0.0 (10.2.1 参照)	

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

大きさ 9 の 1 組の標本データ

x_i	y_i
1	3
2	3
3	5
4	5
5	6
6	7
7	8
8	8
9	9

から回帰係数に関する仮説 $A = 0$ を信頼度 95%として検定する. なお, 対立仮説は $A \neq 0$ とし, 母分散の値は未知である.

(b) 入力データ

ISW1=1 ISW2=2, ISW3=1, N=9, 配列 X, 配列 Y, X0=0.0, CL=95.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B3TSSR
! *** EXAMPLE OF D3TSSR ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      INTEGER N
      PARAMETER (N=9)
      REAL(8) X(N),Y(N),W(29)
      INTEGER IERR,ISW1,ISW2
      REAL(8) CL,Z(2),STAT(2)
      DATA (X(I),I=1,N) &
          /1.0D0, 2.0D0, 3.0D0, 4.0D0, 5.0D0,&
           6.0D0, 7.0D0, 8.0D0, 9.0D0/,&
         (Y(I),I=1,N) &
          /3.0D0, 3.0D0, 5.0D0, 5.0D0, 6.0D0,&
           7.0D0, 8.0D0, 8.0D0, 9.0D0/
!
      ISW1=1
      ISW2=2
      ISW3=1
      X0=0.0D0
      CL=95.0D0
!
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1100)ISW1
      WRITE(6,1110)ISW2
      WRITE(6,1120)ISW3
      WRITE(6,2000)N
      WRITE(6,2100)CL
      WRITE(6,2200)
      DO 100 I=1,N
         WRITE(6,2210)I,X(I),Y(I)
  100 CONTINUE
!
      CALL D3TSSR(X,N,Y,YV,X0,CL,IR,Z,STAT,ISW1,ISW2,ISW3,W,IERR)
!
      WRITE(6,3000)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,3010)
      WRITE(6,5000)X0
      IF(IR.EQ.0) THEN
         WRITE(6,5010)
      ELSE
         WRITE(6,5020)
      ENDIF
      WRITE(6,6000) Z(1),Z(2)
      WRITE(6,7000) STAT(1)
      WRITE(6,7100) STAT(2)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' ',/,5X,'*** D3TSSR ***',/,&
      6X,'** INPUT **')
 1100 FORMAT(9X,'ISW1= ',I3)
 1110 FORMAT(9X,'ISW2= ',I3)
 1120 FORMAT(9X,'ISW3= ',I3)
 2000 FORMAT(9X,'N   = ',I3)
 2100 FORMAT(9X,'CL  = ',F5.1)
 2200 FORMAT(9X,'SAMPLE DATA',/,&
             9X,' I',1X,'X(I)',1X,'Y(I)')
 2210 FORMAT(9X,I2,2F5.1)
```

```
 3000 FORMAT(6X,'** OUTPUT **')
 3010 FORMAT(6X,'*** REGRESSION COEFFICIENT ***')
 4000 FORMAT(9X,'IERR = ',I4)
 5000 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS:  A .EQ.',F5.1)
 5010 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS ACCEPTED.')
 5020 FORMAT(9X,'HYPOTHESIS IS REJECTED.')
 6000 FORMAT(9X,'Z(1)= ',F8.4,/,9X,'Z(2)= ',F8.4)
 7000 FORMAT(9X,'REGRESSION COEFFICIENT OF SAMPLE= ',D18.10)
 7100 FORMAT(9X,'CONSTANT TERM          OF SAMPLE= ',D18.10)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D3TSSR ***
 ** INPUT **
    ISW1=   1
    ISW2=   2
    ISW3=   1
    N   =   9
    CL  =  95.0
    SAMPLE DATA
     I X(I) Y(I)
     1  1.0  3.0
     2  2.0  3.0
     3  3.0  5.0
     4  4.0  5.0
     5  5.0  6.0
     6  6.0  7.0
     7  7.0  8.0
     8  8.0  8.0
     9  9.0  9.0
 ** OUTPUT **
    IERR =    0
 *** REGRESSION COEFFICIENT ***
    HYPOTHESIS:  A .EQ.  0.0
    HYPOTHESIS IS REJECTED.
    Z(1)=  14.7577
    Z(2)=   2.3646
    REGRESSION COEFFICIENT OF SAMPLE=   0.7833333333D+00
    CONSTANT TERM          OF SAMPLE=   0.2083333333D+01
```

第 7 章　分散分析・実験計画

7.1　概 要

実験計画法は推測統計学の 1 つの分野である. 実験計画法では実測値 x を確率変数 X の実現値とみなし, 実験条件に対応して X の内部構造を考え, これを実測値を通して分析する. 分析を行うためには, あらかじめ実験を計画する必要がある. 一方, 実測値を分析するために分散分析表と呼ばれる表を用いて級間変動や級内変動, 誤差変動といった量を系統的に求める. この種の解析法は**分散分析法**と呼ばれる.

本ライブラリでは, 実験計画や分散分析を行うための以下の機能を用意している.

- 1 元配置
- 2 元配置
- 多元配置
- 乱塊法
- グレコ・ラテン方格法
- 累積法
- 釣り合い型不完備計画

7.1.1　解説

(1) **1 元配置**

1 元配置の分散分析法では m 個の水準からなり各水準ごとの繰り返し数が n_j であるような 1 元配置のデータ $\{x_{ij}\}(i=1,\cdots,n_j; j=1,\cdots,m)$ が与えられたとき, これにもとづいて m 個の母集団分布の平均の間に差があるかどうかを検定することを問題とする．このとき, 1 元配置の観測値の構造式は次の様に定義される．

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}$$

ただし, μ は観測値の総平均, α_i は第 i 水準のおける効果, ϵ_{ij} は観測誤差を表し, 互いに独立に正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従うものとする．分析には次の様なデータを計算する．各水準ごとの平均:

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j} \qquad j=1,\cdots,m$$

各水準ごとの分散:

$$V_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij}-\bar{x}_j)^2}{\alpha_j} \qquad j=1,\cdots,m$$

総平均:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} n_j}$$

ここで, α_j は標本分散を用いる場合は n_j, 不偏分散を用いる場合は n_j-1 となる．
変動:

- 総変動

$$S_T = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x})^2$$

- 級間変動

$$S_A = \sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_j-\bar{x})^2$$

- 誤差変動

$$S_E = S_T - S_A$$

自由度:

- 総変動の自由度

$$\phi_T = \sum_{j=1}^{m} n_j - 1$$

- 級間変動の自由度

$$\phi_A = m - 1$$

- 誤差変動の自由度

$$\phi_E = \sum_{j=1}^{m}(n_j - 1)$$

不偏分散:

- 級間変動の不偏分散

$$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$$

- 誤差変動の不偏分散

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E}$$

分散比:

$$F_A = \frac{V_A}{V_E}$$

寄与率:

- 級間変動の寄与率

$$P_A = \frac{S_A - \phi_A \cdot V_E}{S_T}$$

- 誤差変動の寄与率

$$P_E = 1 - P_A$$

検定は分散比 F_A が自由度 ϕ_A, ϕ_E の F 分布の臨界値を用いて行う.

(2) **2 元配置**

因子 A と B がそれぞれ m_a 個と m_b 個の水準からなり, 各水準の組合せにおいて繰り返し数が n_{ij} である 2 元配置のデータ $\{x_{kij}\}(k=1,\cdots,n_{ij}; i=1,\cdots,m_a; j=1,\cdots,m_b)$ が与えられたとき, これにもとづいて 2 元配置の観測値の構造式を次の様に定義し

$$x_{kij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{kij}$$

因子 A の i 水準の効果 α_i, 因子 B の j 水準の効果 β_j, 交互作用効果 γ_{ij} を検定することを問題とする. ただし, μ は観測値の総平均, ϵ_{ij} は観測誤差を表し, 互いに独立に正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従うものとする. 各効果はいずれも定数であるからこのような模型を**母数模型**と呼んでいる. 詳細は参考文献等を参照されたい.

(3) **多元配置**

2 元配置を一般化し, 因子数を増やした方法で, 各因子の効果や因子間の交互作用効果を検定することを問題とする. 詳細は参考文献等を参照されたい.

(4) **乱塊法**

乱塊法は実験配置法の一種である. 一般に, 実験を行う場合に, 当面の目的にかかわる条件 (**要因**) から言えば副次的因子ではあるが, その影響を考慮しておくことが実験の効率上有利であるような因子がある場合がある. このような因子の影響を除くために**乱塊法**ではその中ではこのような副次的な因子の影響が小さくなる様にグループ分けしたブロックを用いる. 一般に異なるブロック間では副次的な条件が大きくなり, 同一ブロック内では, それが小さくなる様にブロックは配置される. 乱塊法では各ブロックに要因の水準に等しい区画を用意し, ブロックごとに要因の各水準を各区画にランダムに割り当てる.

(5) **グレコ・ラテン方格法**
n 個のラテン文字 $A, B, \cdots$ を n 行 n 列に配列し, 同じ行, 同じ列に同じラテン文字が重複して表れることがないように配列したものを $n \times n$ 型ラテン方格という. このようなラテン方格を用いて実験配置を行うことによって行方向の不均一性と列方向の不均一性を除去して処理 $A, B, \cdots$ 間の有為差検定を行うことが出来る (ラテン方格法). ただし, この場合, 行効果と列効果の間には交互作用は存在せず, 実験データは一般平均, 行効果, 列効果, 処理効果および実験誤差が加法的に合成されている必要がある. 一方, ラテン方格の代わりに 2 つの直交するラテン方格を組み合わせて得られる表 (グレコ・ラテン方格) を用いて行う分散分析をグレコ・ラテン方格法と呼ぶ. グレコ・ラテン方格法は要因数が 4, 各要因の水準数が同数で 4 以上でかつ各要因の交互作用が存在しないの場合に利用できる.

(6) **累積法**
詳細は参考文献等を参照されたい.

7.1.2 参考文献

(1) 武藤眞介, “統計解析ハンドブック”, 朝倉書店 (1995).

(2) 田口玄一, “実験計画法 (上)(下)”, 丸善株式会社.

7.2 1元配置

7.2.1 D41WR1, R41WR1
1元配置分散分析

(1) **機 能**

m 個の水準からなり各水準ごとの繰り返し数が n_j であるような1元配置のデータ $\{x_{ij}\}(i=1,\cdots,n_j;j=1,\cdots,m)$ が与えられたとき, 各水準ごとの平均と分散および総平均を求め, 分散分析を行う.

なお, 1元配置のデータ $\{x_{ij}\}$ $(i=1,\cdots,n_j;j=1,\cdots,m)$ に対する各水準ごとの平均と分散および総平均は, それぞれ次式で定義される.

各水準ごとの平均:

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j} \qquad j=1,\cdots,m$$

各水準ごとの分散:

$$V_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij}-\bar{x}_j)^2}{\alpha_j} \qquad j=1,\cdots,m$$

総平均:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} n_j}$$

ここで, α_j は標本分散を用いる場合は n_j, 不偏分散を用いる場合は n_j-1 となる.

また, 分散分析の結果は, それぞれ次式で定義される.

変動:

- 総変動

$$S_T = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x})^2$$

- 級間変動

$$S_A = \sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_j-\bar{x})^2$$

- 誤差変動

$$S_E = S_T - S_A$$

自由度:

- 総変動の自由度

$$\phi_T = \sum_{j=1}^{m} n_j - 1$$

- 級間変動の自由度

$$\phi_A = m - 1$$

- 誤差変動の自由度

$$\phi_E = \sum_{j=1}^{m}(n_j - 1)$$

不偏分散:

- 級間変動の不偏分散

$$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$$

- 誤差変動の不偏分散

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E}$$

分散比:

$$F_A = \frac{V_A}{V_E}$$

寄与率:

- 級間変動の寄与率

$$P_A = \frac{S_A - \phi_A \cdot V_E}{S_T}$$

- 誤差変動の寄与率

$$P_E = 1 - P_A$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D41WR1 (A, NA, M, N, NR, STAT, X1, V, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R41WR1 (A, NA, M, N, NR, STAT, X1, V, ISW, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　{ 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D, R}	NA,M	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ij})(注意事項 (a) 参照)
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	M	I	1	入 力	水準の数 m
4	N	I	M	入 力	j 番目の水準の繰り返し数 n_j (NR$\geq$ 1 の場合には使用しない.)
5	NR	I	1	入 力	各水準の繰り返し数が等しい場合の繰り返し数. $n_1 = n_2 = \cdots = n_m$ 各水準の繰り返し数が等しくない場合は 0 以下の値に設定する.
6	STAT	{D, R}	M,2	出 力	各水準の平均と分散 (注意事項 (b) 参照)
7	X1	{D, R}	1	出 力	総平均
8	V	{D, R}	11	出 力	分散分析の結果 (分散分析の結果の格納方法については注意事項 (c) の表 7–1 参照.)
9	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏分散を計算 1: 標本分散を計算
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) ISW $=0, 1$

(b) NR ≤ 0 かつ NA $\geq$ N(j)　$(j=1,\cdots,\mathrm{M})$
　または NA $\geq$ NR

(c) M ≥ 1

(d) NR ≤ 0 かつ N(j) ≥ 1　$(j=1,\cdots,\mathrm{M})$
　または NR ≥ 1

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	以下の 5 つの条件が同時に成立した. (a) ISW= 0 (b) M> 1 (c) NR< 1 (d) ある j ($j = 1, \cdots, \mathrm{M}$) について N($j$) = 1 (e) N(1) = N(2) = $\cdots$ = N(M) = 1 ではない.	N(j) = 1 である STAT($j, 2$) に表現できる絶対値最大値を設定し，それ以外の STAT($j, 2$) は正常に計算される.
1020	以下の条件のいずれかが成立した. (a) M=1 かつ NR< 1 かつ N(1)> 1 (b) M= 1 かつ ISW= 1 (c) M> 1 かつ NR= 1 かつ ISW= 1 (d) M> 1 かつ NR< 1 かつ ISW= 1 かつ N(1)=N(2)= $\cdots$ =N(M)= 1	V(7)~V(11) に表現できる絶対値最大値を設定する.
1030	以下の条件のいずれかが成立した. (a) NR= 1 かつ ISW= 0 (b) NR< 1 かつ ISW= 0 かつ N(1)=N(2)= $\cdots$ =N(M)= 1	すべての STAT($j, 2$) ($j = 1, \cdots, \mathrm{M}$) と V(7)~V(11) に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (b), (c) または (d) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 観測値 (x_{ij}) は実行列 (2 次元配列型) として配列 A に格納する.
(格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(b) 各水準ごとの平均と分散は配列 STAT に次のように格納される.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{STAT}(j,1) & : & 平均\ \bar{x}_j \\ \mathrm{STAT}(j,2) & : & 分散\ v_j \end{array} \quad , \quad j = 1, \cdots, \mathrm{M}$$

(c) 分散分析の結果は配列 V に次のように格納される.

表 7−1　分散分析表

要素	変動	自由度	不偏分散	分散比	寄与率
全体	V(1)	V(4)			
級間	V(2)	V(5)	V(7)	V(9)	V(10)
誤差	V(3)	V(6)	V(8)		V(11)

(d) 不偏分散を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本分散を計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題
以下のような行列 X で与えられる 1 元配置のデータに対して, 各水準ごとの平均と分散および総平均を求め, 分散分析を行う.

$$X = \begin{bmatrix} 71 & 83 & 85 & 84 & 82 \\ 74 & 79 & 84 & 80 & 78 \\ 76 & 83 & 89 & 82 & 83 \\ 72 & 77 & 82 & 85 & 83 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ
1 元配置のデータ X, NA=100, M=5, NR=4, ISW=0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B41WR1
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, M = 5 )
      DIMENSION A(NA,M),N(M),STAT(M,2),V(11)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =   0
      DO 100 I=1,M
         N(I) = 0
  100 CONTINUE
      READ(5,*) NR
      READ(5,*) ISW
      DO 110 I=1,NR
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,M,NR,(N(I),I=1,M)
      DO 120 I=1,NR
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,M)
  120 CONTINUE
      CALL D41WR1(A,NA,M,N,NR,STAT,X1,V,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040)
      DO 130 L=1,M
         WRITE(6,6050) L,STAT(L,1),STAT(L,2)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6060) X1
      WRITE(6,6070) 'TOTAL',V(1),V(4)
      WRITE(6,6070) 'LEVEL',V(2),V(5),V(7),V(9),V(10)
      WRITE(6,6080) 'ERROR',V(3),V(6),V(8),V(11)
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D41WR1 ***',/,&
```

```
                /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
              /,7X,'M = ',I6,5X,'NR = ',I6,/,&
              /,7X,'NUMBER OF REPETITIONS IN EACH LEVEL',/,/,&
               7X,5(2X,I6),/,&
              /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'VALUE OF EACH LEVEL',/,&
              /,10X,'LEVEL',6X,'MEAN',6X,'VARIANCE',/,&
               9X,35('-'))
 6050 FORMAT(  7X,I6,2X,F11.2,2X,D15.8)
 6060 FORMAT( /,7X,'MEAN OVER ALL LEVELS = ',D15.8,/,&
              /,7X,'ANALYSIS OF VARIANCE TABLE',/,&
              /,10X,'FACTOR',&
                   6X,'S.S.',9X,'D.F.',7X,'M.S.',8X,'V.R.',8X,'C.R.',/,&
               9X,69('-'))
 6070 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.2),3(1X,D11.4))
 6080 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.2),1X,D11.4,13X,D11.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D41WR1 ***

  ** INPUT **

      ISW =      0

      M =      5     NR =      4

      NUMBER OF REPETITIONS IN EACH LEVEL

             0       0       0       0       0

      OBSERVATION MATRIX

              71.00        83.00        85.00        84.00        82.00
              74.00        79.00        84.00        80.00        78.00
              76.00        83.00        89.00        82.00        83.00
              72.00        77.00        82.00        85.00        83.00

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      VALUE OF EACH LEVEL

         LEVEL      MEAN      VARIANCE
        -----------------------------------
             1       73.25   0.49166667D+01
             2       80.50   0.90000000D+01
             3       85.00   0.86666667D+01
             4       82.75   0.49166667D+01
             5       81.50   0.56666667D+01

      MEAN OVER ALL LEVELS =  0.80600000D+02

      ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

         FACTOR      S.S.         D.F.       M.S.        V.R.        C.R.
        ---------------------------------------------------------------------
         TOTAL       414.80        19.00
         LEVEL       315.30         4.00  0.7882D+02  0.1188D+02  0.6962D+00
         ERROR        99.50        15.00  0.6633D+01              0.3038D+00
```

7.3 2元配置

7.3.1 D42WRN, R42WRN
2元配置分散分析

(1) **機 能**

因子 A と B がそれぞれ m_a 個と m_b 個の水準からなり, 各水準の組合せにおいて繰り返しのない 2 元配置のデータ $\{x_{ij}\}(i=1,\cdots,m_a; j=1,\cdots,m_b)$ に対して, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均を求め, 分散分析を行う.

なお, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均は以下のように定義される.

因子 A の各水準に対する平均:

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{m_b}\sum_{j=1}^{m_b} x_{ij}$$

因子 A の各水準に対する分散:

$$V_{ai} = \frac{1}{\alpha_b}\sum_{j=1}^{m_b}(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})^2$$

因子 B の各水準に対する平均:

$$\bar{x}_{\cdot j} = \frac{1}{m_a}\sum_{i=1}^{m_a} x_{ij}$$

因子 B の各水準に対する分散:

$$V_{bj} = \frac{1}{\alpha_a}\sum_{i=1}^{m_a}(x_{ij} - \bar{x}_{\cdot j})^2$$

総平均:

$$\bar{x} = \frac{1}{m_a \cdot m_b}\sum_{i=1}^{m_a}\sum_{j=1}^{m_b} x_{ij}$$

ここで標本分散を用いる場合は $\alpha_a = m_a$, $\alpha_b = m_b$, 不偏分散を用いる場合には $\alpha_a = m_a - 1$, $\alpha_b = m_b - 1$ である.

また, 分散分析の結果は, それぞれ次式で定義される.

変動:

- 総変動

$$S_T = \sum_{i=1}^{m_a}\sum_{j=1}^{m_b}(x_{ij} - \bar{x})^2$$

- 因子 A の変動

$$S_A = m_b\sum_{i=1}^{m_a}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2$$

- 因子 B の変動

$$S_B = m_a\sum_{j=1}^{m_b}(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

- 誤差変動

$$S_E = S_T - (S_A + S_B)$$

自由度:

- 総変動の自由度

$$\phi_T = m_a \cdot m_b - 1$$

- 因子 A の変動の自由度

$$\phi_A = m_a - 1$$

- 因子 B の変動の自由度

$$\phi_B = m_b - 1$$

- 誤差変動の自由度

$$\phi_E = (m_a - 1) \cdot (m_b - 1)$$

不偏分散:

- 因子 A の変動の不偏分散

$$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$$

- 因子 B の変動の不偏分散

$$V_B = \frac{S_B}{\phi_B}$$

- 誤差変動の不偏分散

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E}$$

分散比:

- 因子 A の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_A = \frac{V_A}{V_E}$$

- 因子 B の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_B = \frac{V_B}{V_E}$$

寄与率:

- 因子 A の変動の寄与率

$$P_A = \frac{S_A - \phi_A \cdot V_E}{S_T}$$

- 因子 B の変動の寄与率

$$P_B = \frac{S_B - \phi_B \cdot V_E}{S_T}$$

- 誤差変動の寄与率

$$P_E = 1 - P_A - P_B$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D42WRN (A, NA, LA, LB, STATA, STATB, X1, V, ISW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R42WRN (A, NA, LA, LB, STATA, STATB, X1, V, ISW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	NA,LB	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ij}) (注意事項 (a) 参照)
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	LA	I	1	入 力	因子 A の水準の数 m_a
4	LB	I	1	入 力	因子 B の水準の数 m_b
5	STATA	{D/R}	LA,2	出 力	因子 A の各水準の平均と分散 (注意事項 (b) 参照)
6	STATB	{D/R}	LB,2	出 力	因子 B の各水準の平均と分散 (注意事項 (b) 参照)
7	X1	{D/R}	1	出 力	総平均
8	V	{D/R}	16	出 力	分散分析表 (分散分析表の格納方法については注意事項 (c) の表 7–2 参照.)
9	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏分散を計算 1: 標本分散を計算
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW = 0, 1

(b) NA $\geq$ LA $\geq$ 1

(c) NB $\geq$ 1

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	LA = 1 または LB = 1 でかつ ISW = 0 であった.	LA = 1 ならば因子 B の各水準の分散に, LB = 1 ならば因子 A の各水準の分散にそれぞれ表現できる絶対値最大値を設定する. また, V(9)∼ V(16) に表現できる絶対値最大値を設定する.
1020	LA = 1 または LB = 1 でかつ ISW = 1 であった.	V(9)∼ V(16) に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (b) または (c) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 観測値 (x_{ij}) は実行列 (2 次元配列型) として配列 A に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(b) 因子 A および B の各水準ごとの平均と分散は配列 STATA および STATB に次のように格納する.

STATA (i, 1) : 因子 A の各水準ごとの平均 $\bar{x}_{i\cdot}$
STATA (i, 2) : 因子 A の各水準ごとの分散 V_{ai}
STATB (j, 1) : 因子 B の各水準ごとの平均 $\bar{x}_{\cdot j}$
STATB (j, 2) : 因子 B の各水準ごとの分散 V_{bj}

, $\quad i = 1, \cdots, \mathrm{LA}; j = 1, \cdots, \mathrm{LB}$

(c) 分散分析表の要素は配列 V に次のように格納する.

表 7–2　分散分析表の格納状態

要素	変動	自由度	不偏分散	分散比	寄与率
全体	V(1)	V(5)			
因子 A	V(2)	V(6)	V(9)	V(12)	V(14)
因子 B	V(3)	V(7)	V(10)	V(13)	V(15)
誤差	V(4)	V(8)	V(11)		V(16)

(d) 不偏分散を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本分散を計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

因子 A と B を持つ繰り返しのない 2 元配置のデータが以下のような行列 X で与えられたとき, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均を求め, 分散分析を行う.

$$X = \begin{bmatrix} 1.26 & 1.21 & 1.19 \\ 1.29 & 1.23 & 1.23 \\ 1.38 & 1.27 & 1.22 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

2 元配置のデータ X, NA=10, LA=3, LB=3, ISW=0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B42WRN
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 10, LA = 3, LB = 3 )
      DIMENSION A(NA,LB),STATA(LA,2),STATB(LB,2),V(16)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      READ(5,*) ISW
      DO 100 I = 1,LA
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,LB)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,LA,LB
      DO 110 I=1,LA
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,LB)
  110 CONTINUE
      CALL D42WRN(A,NA,LA,LB,STATA,STATB,X1,V,ISW,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) 'A'
      DO 120 L=1,LA
         WRITE(6,6050) L,STATA(L,1),STATA(L,2)
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6040) 'B'
      DO 130 L=1,LB
         WRITE(6,6050) L,STATB(L,1),STATB(L,2)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6060) X1
      WRITE(6,6070) 'TOTAL',V(1),V(5)
      WRITE(6,6070) '  A  ',V(2),V(6),V(9),V(12),V(14)
      WRITE(6,6070) '  B  ',V(3),V(7),V(10),V(13),V(15)
      WRITE(6,6080) 'ERROR',V(4),V(8),V(11),V(16)
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D42WRN ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
             /,7X,'LA = ',I6,5X,'LB = ',I6,/,&
             /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'VALUE OF EACH LEVEL OF FACTOR ',A,/,&
             /,10X,'LEVEL',7X,'MEAN',6X,'VARIANCE',/,&
              9X,35('-'))
 6050 FORMAT(  7X,I6,2X,F11.2,2X,D15.8)
 6060 FORMAT( /,7X,'MEAN OVER ALL LEVELS = ',F11.2,/,&
             /,7X,'ANALYSIS OF VARIANCE TABLE',/,&
             /,10X,'FACTOR',&
                  8X,'S.S.',9X,'D.F.',6X,'M.S.',8X,'V.R.',8X,'C.R',/,&
              9X,69('-'))
 6070 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.4),3(1X,D11.4))
 6080 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.4),1X,D11.4,13X,D11.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D42WRN ***

  ** INPUT **

      ISW =      0

      LA =      3     LB =      3

      OBSERVATION MATRIX

               1.26         1.21         1.19
               1.29         1.23         1.23
               1.38         1.27         1.22

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      VALUE OF EACH LEVEL OF FACTOR A
```

```
    LEVEL       MEAN      VARIANCE
   -----------------------------------
      1         1.22   0.13000000D-02
      2         1.25   0.12000000D-02
      3         1.29   0.67000000D-02

VALUE OF EACH LEVEL OF FACTOR B

    LEVEL       MEAN      VARIANCE
   -----------------------------------
      1         1.31   0.39000000D-02
      2         1.24   0.93333333D-03
      3         1.21   0.43333333D-03

MEAN OVER ALL LEVELS =        1.25

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

    FACTOR        S.S.          D.F.      M.S.         V.R.         C.R
   ---------------------------------------------------------------------
    TOTAL       0.0258        8.0000
      A         0.0074        2.0000  0.3700D-02  0.4723D+01  0.2261D+00
      B         0.0153        2.0000  0.7633D-02  0.9745D+01  0.5310D+00
    ERROR       0.0031        4.0000  0.7833D-03              0.2429D+00
```

7.3.2 D42WRM, R42WRM 2 元配置分散分析 (欠測値あり)

(1) **機 能**

因子 A と B がそれぞれ m_a 個と m_b 個の水準からなり, 各水準の組合せにおいて繰り返しがなく, n_s 個の水準の組み合わせについてデータが得られていない 2 元配置のデータ $\{x_{ij}\}(i=1,\cdots,m_a; j=1,\cdots,m_b)$ に対して, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均を求め, 分散分析を行う. 得られていない水準の組み合わせのデータを欠測値と呼び, 各統計量の計算においては, 欠測値については, その推定値で代用する.
なお, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均は以下のように定義される.
因子 A の各水準に対する平均:

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{m_b}\sum_{j=1}^{m_b} x_{ij}$$

因子 A の各水準に対する分散:

$$V_{ai} = \frac{1}{\alpha_b}\sum_{j=1}^{m_b}(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})^2$$

因子 B の各水準に対する平均:

$$\bar{x}_{\cdot j} = \frac{1}{m_a}\sum_{i=1}^{m_a} x_{ij}$$

因子 B の各水準に対する分散:

$$V_{bj} = \frac{1}{\alpha_a}\sum_{i=1}^{m_a}(x_{ij} - \bar{x}_{\cdot j})^2$$

総平均:

$$\bar{x} = \frac{1}{m_a \cdot m_b}\sum_{i=1}^{m_a}\sum_{j=1}^{m_b} x_{ij}$$

ここで標本分散を用いる場合は $\alpha_a = m_a$, $\alpha_b = m_b$, 不偏分散を用いる場合には $\alpha_a = m_a - 1$, $\alpha_b = m_b - 1$ である.
また, 分散分析の結果は, それぞれ次式で定義される.
変動:

- 総変動

$$S_T = \sum_{i=1}^{m_a}\sum_{j=1}^{m_b}(x_{ij} - \bar{x})^2$$

- 因子 A の変動

$$S_A = m_b\sum_{i=1}^{m_a}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2$$

- 因子 B の変動

$$S_B = m_a\sum_{j=1}^{m_b}(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

- 誤差変動

$$S_E = S_T - (S_A + S_B)$$

自由度:

- 総変動の自由度

$$\phi_T = m_a \cdot m_b - n_s - 1$$

- 因子 A の変動の自由度

$$\phi_A = m_a - 1$$

- 因子 B の変動の自由度

$$\phi_B = m_b - 1$$

- 誤差変動の自由度

$$\phi_E = (m_a - 1) \cdot (m_b - 1) - n_s$$

不偏分散:

- 因子 A の変動の不偏分散

$$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$$

- 因子 B の変動の不偏分散

$$V_B = \frac{S_B}{\phi_B}$$

- 誤差変動の不偏分散

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E}$$

分散比:

- 因子 A の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_A = \frac{V_A}{V_E}$$

- 因子 B の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_B = \frac{V_B}{V_E}$$

寄与率:

- 因子 A の変動の寄与率

$$P_A = \frac{S_A - \phi_A \cdot V_E}{S_T}$$

- 因子 B の変動の寄与率

$$P_B = \frac{S_B - \phi_B \cdot V_E}{S_T}$$

- 誤差変動の寄与率

$$P_E = 1 - P_A - P_B$$

欠測値の推定:
欠測値の推定値は誤差変動 S_E を最小にするように定める. S_E を最小にする推定値を求めるには, 欠測値 x_{st} $((s,t) \in S)$ を未知数とする方程式

$$\frac{\partial S_E}{\partial x_{st}} = 0 \qquad ((s,t) \in S)$$

を解けばよい. ここで S は欠測値になっている水準の組み合わせの集合とする. S_E は観測データの 2 次式であるから, この方程式は, 欠測値を未知数とする n_s 元連立 1 次方程式である.
例えば, x_{13} と x_{22} が欠測値となっている 2 元配置のデータ

$$X = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.1 & x_{13} \\ 1.2 & x_{22} & 1.3 \\ 1.1 & 1.0 & 1.3 \end{bmatrix}$$

について, 誤差変動は

$$S_E = 1.78 - 1.4x_{13} - 1.4x_{22} + \frac{4}{9}x_{13}^2 + \frac{4}{9}x_{22}^2 + \frac{2}{9}x_{13}x_{22}$$

である. これを x_{13}, x_{22} について微分することにより連立 1 次方程式

$$\frac{\partial S_E}{\partial x_{13}} = -1.4 + \frac{8}{9}x_{13} + \frac{2}{9}x_{22} = 0$$

$$\frac{\partial S_E}{\partial x_{22}} = -1.4 + \frac{2}{9}x_{13} + \frac{8}{9}x_{22} = 0$$

が得られ, これを解くことにより, 欠測値の推定値 $x_{13} = 1.26$, $x_{22} = 1.26$ が求められる.

(2) **使用法**
倍精度サブルーチン:
CALL D42WRM (A, NA, LA, LB, IST, ISN, STATA, STATB, X1, V, ISW, IWK, WK, IERR)
単精度サブルーチン:
CALL R42WRM (A, NA, LA, LB, IST, ISN, STATA, STATB, X1, V, ISW, IWK, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	NA,LB	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ij}) (注意事項 (b) 参照)
				出 力	観測値を格納した行列 (x_{ij}). ただし, 欠測値に対応する要素には, その推定値が格納される.
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	LA	I	1	入 力	因子 A の水準の数 m_a
4	LB	I	1	入 力	因子 B の水準の数 m_b
5	IST	I	ISN,2	入 力	欠測値になっている水準の組み合わせの情報 (注意事項 (a) 参照)
6	ISN	I	1	入 力	欠測値の個数 n_s
7	STATA	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	LA,2	出 力	因子 A の各水準の平均と分散 (注意事項 (c) 参照)
8	STATB	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	LB,2	出 力	因子 B の各水準の平均と分散 (注意事項 (c) 参照)
9	X1	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	総平均
10	V	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	16	出 力	分散分析表 (分散分析表の格納方法については注意事項 (d) の表 7−3 参照.)
11	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏分散を計算 1: 標本分散を計算
12	IWK	I	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:**LA × LB + ISN
13	WK	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:**$\mathrm{ISN}^2 + 2 \times \mathrm{ISN} + \mathrm{LA} + \mathrm{LB} + 1$
14	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{ISW} = 0, 1$

(b) $\mathrm{NA} \geq \mathrm{LA} \geq 2$

(c) $\mathrm{LB} \geq 2$

(d) $1 \leq \mathrm{ISN} < (\mathrm{LA} - 1) \times (\mathrm{LB} - 1)$

(e) $1 \leq \mathrm{IST(i, 1)} \leq \mathrm{LA}\ (\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{ISN})$

(f) $1 \leq \mathrm{IST(i, 2)} \leq \mathrm{LB}\ (\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{ISN})$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
2000	欠測値の推定値を計算できなかった.	欠測値のデータを欠測値以外のデータの平均値で代用して処理を続ける.
3000	制限条件 (b)∼(f) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) i 番目の欠測値の因子 A の水準を IST$(i,1)$ に, 因子 B の水準を IST$(i,2)$ にそれぞれ格納する.

(b) 観測値 (x_{ij}) は実行列 (2 次元配列型) として配列 A に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(c) 因子 A および B の各水準ごとの平均と分散は配列 STATA および STATB に次のように格納する.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{STATA }(i,1) & : & \text{因子 A の各水準ごとの平均 } \bar{x}_{i.} \\ \text{STATA }(i,2) & : & \text{因子 A の各水準ごとの分散 } V_{ai} \\ \text{STATB }(j,1) & : & \text{因子 B の各水準ごとの平均 } \bar{x}_{.j} \\ \text{STATB }(j,2) & : & \text{因子 B の各水準ごとの分散 } V_{bj} \end{array}\right. , \quad i = 1, \cdots, \text{LA}; j = 1, \cdots, \text{LB}$$

(d) 分散分析表の要素は配列 V に次のように格納する.

表 7−3　分散分析表の格納状態

要素	変動	自由度	不偏分散	分散比	寄与率
全体	V(1)	V(5)			
因子 A	V(2)	V(6)	V(9)	V(12)	V(14)
因子 B	V(3)	V(7)	V(10)	V(13)	V(15)
誤差	V(4)	V(8)	V(11)		V(16)

(e) 不偏分散を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる. 一方, 標本分散を計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(7) 使用例

(a) 問 題

因子 A と B を持つ繰り返しのない 2 元配置のデータが以下のような行列 X で与えられたとき, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均を求め, 分散分析を行う. ただし, $*$ は対応するデータが欠測値であることを示す.

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 7 & 10 & * & 16 & * \\ * & 14 & 18 & 22 & 26 \\ 13 & 18 & 23 & 28 & 33 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

2 元配置のデータ $X, \mathrm{NA} = 4, \mathrm{LA} = 4, \mathrm{LB} = 5, \mathrm{ISN} = 3, \mathrm{ISW} = 0,$

$\mathrm{IST}(1,1) = 2, \mathrm{IST}((1,2)) = 3, \mathrm{IST}(2,1) = 4, \mathrm{IST}((2,2)) = 1, \mathrm{IST}(2,1) = 2, \mathrm{IST}((2,2)) = 5$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM N42WRM
      IMPLICIT NONE
!
      INTEGER NN,MM,NS,NW,NIW
      PARAMETER(NN=4,MM=5,NS=3,NW=25,NIW=23)
      REAL(8) A(NN,MM),W1(NW),STATA(NN,2),STATB(MM,2)
      REAL(8) X1,V(16)
!     REAL(8) C0,C1
!     PARAMETER(C0=0.0D0,C1=1.0D0)
      INTEGER NA,LA,LB,ISN,IST(NS,2),IW1(NIW)
      INTEGER I,J,L,ISW,IERR
!     WK1 = 0.0D0
!
!     EXAMPLE OF D/R42WRM
!
      WRITE(6,5000)
      WRITE(6,5001)
      IERR = 0
      READ(5,*) ISW
      READ(5,*) NA
      READ(5,*) LA
      READ(5,*) LB
      READ(5,*) ISN
      WRITE(6,5100) ISW,NA,LA,LB,ISN
      WRITE(6,5200)
      DO 100 I = 1,ISN
         READ(5,*) IST(I,1),IST(I,2)
         WRITE(6,5250) IST(I,1),IST(I,2)
 100  CONTINUE
      WRITE(6,5260)
      DO 110 I=1,LA
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,LB)
         WRITE(6,5270) (A(I,J),J=1,LB)
 110  CONTINUE
      CALL D42WRM&
      (A,NA,LA,LB,IST,ISN,STATA,STATB,X1,V,ISW,IW1,W1,IERR)
      WRITE(6,5300) IERR
      WRITE(6,5350)
      DO 130 I=1,ISN
         WRITE(6,5360) IST(I,1),IST(I,2),A(IST(I,1),IST(I,2))
 130  CONTINUE
      WRITE(6,5400)
      WRITE(6,5500) X1
      WRITE(6,5600)
      WRITE(6,7400) (STATA(L,1),L=1,LA)
      WRITE(6,5800)
      WRITE(6,7400) (STATA(L,2),L=1,LA)
      WRITE(6,5610)
      WRITE(6,7500) (STATB(L,1),L=1,LB)
      WRITE(6,5810)
      WRITE(6,7500) (STATB(L,2),L=1,LB)
      WRITE(6,5900)
      WRITE(6,6050)
      WRITE(6,6100) V(1),V(5)
      WRITE(6,6200) V(2),V(6),V(9),V(12),V(14)
      WRITE(6,6210) V(3),V(7),V(10),V(13),V(15)
      WRITE(6,6300) V(4),V(8),V(11),V(16)
 5000 FORMAT( /,' **** D42WRM ****')
 5001 FORMAT( /,' ** INPUT **',/)
 5100 FORMAT( /,7X,'ISW =',I6,/,&
              /,7X,'NA  = ',I6&
                  ,5X,'LA  = ',I6&
                  ,5X,'LB  = ',I6&
                  ,5X,'ISN = ',I6)
 5200 FORMAT( /,/,6X,'MISSED VALUES',/)
 5250 FORMAT( /,8X,'A(',I1,',',I1,')',/)
 5260 FORMAT( /,6X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 5270 FORMAT( /,8X,5(D11.5,1X),/)
 5300 FORMAT( /,' ** OUTPUT **',/,&
```

```
              /,7X,'IERR = ',I6)
 5350 FORMAT( /,/,' ESTIMATED MISSED VALUES',/)
 5360 FORMAT( /,3X,'A(',I1,',',I1,') = ',D15.8,/)
 5400 FORMAT( /,/,' MEAN OVER ALL LEVELS',/,/)
 5500 FORMAT(  '          ',D11.5,' ')
 5600 FORMAT( /,/,' MEAN IN EACH LEVEL OF FACTOR A',/,/)
 5610 FORMAT( /,/,' MEAN IN EACH LEVEL OF FACTOR B',/,/)
 5800 FORMAT( /,/,' VARIANCE IN EACH LEVEL OF FACTOR A',/,/)
 5810 FORMAT( /,/,' VARIANCE IN EACH LEVEL OF FACTOR B',/,/)
 5900 FORMAT( /,/,' ANALYSIS-OF-VARIANCE TABLE',/,/)
 6050 FORMAT(  ' ',&
      ' FACTOR  ',4X,'S.S.',9X,'D.F.',9X,'U.V.',9X,'R.V.',9X,'R.C',/,/)
 6100 FORMAT(  ' ',&
      ' TOTAL   ',1X,D11.5,2X,D11.5)
 6200 FORMAT(  ' ',&
      '   A     ',5(2X,D11.5))
 6210 FORMAT(  ' ',&
      '   B     ',5(2X,D11.5))
 6300 FORMAT(  ' ',&
      ' ERROR   ',3(2X,D11.5),15X,D11.5)
 7300 FORMAT(  '          ',3(' ',D11.5,' '))
 7400 FORMAT(  '          ',4(' ',D11.5,' '))
 7500 FORMAT(  '          ',5(' ',D11.5,' '))
      STOP
      END
```

(d) 出力結果

```
**** D42WRM ****

** INPUT **

     ISW =     0

     NA  =      4     LA  =      4     LB  =      5     ISN =      3

    MISSED VALUES

      A(2,3)

      A(4,1)

      A(2,5)

    OBSERVATION MATRIX

      0.40000D+01 0.60000D+01 0.80000D+01 0.10000D+02 0.12000D+02

      0.70000D+01 0.10000D+02 0.00000D+00 0.16000D+02 0.00000D+00

      0.00000D+00 0.14000D+02 0.18000D+02 0.22000D+02 0.26000D+02

      0.13000D+02 0.18000D+02 0.23000D+02 0.28000D+02 0.33000D+02

** OUTPUT **
     IERR =      0

ESTIMATED MISSED VALUES

  A(2,3) =  0.14408805D+02

  A(4,1) =  0.14320755D+02

  A(2,5) =  0.21742138D+02


MEAN OVER ALL LEVELS

         0.15274D+02

MEAN IN EACH LEVEL OF FACTOR A

          0.80000D+01  0.13830D+02  0.16000D+02  0.23264D+02

VARIANCE IN EACH LEVEL OF FACTOR A

          0.10000D+02  0.32241D+02  0.10000D+03  0.56245D+02
```

```
MEAN IN EACH LEVEL OF FACTOR B

         0.63302D+01  0.12000D+02  0.15852D+02  0.19000D+02  0.23186D+02

VARIANCE IN EACH LEVEL OF FACTOR B

         0.36600D+02  0.26667D+02  0.39815D+02  0.60000D+02  0.77148D+02

ANALYSIS-OF-VARIANCE TABLE

 FACTOR      S.S.         D.F.         U.V.         R.V.         R.C

 TOTAL    0.13908D+04  0.16000D+02
   A      0.59683D+03  0.30000D+01  0.19894D+03  0.14455D+02  0.39945D+00
   B      0.67008D+03  0.40000D+01  0.16752D+03  0.12172D+02  0.44222D+00
 ERROR    0.12386D+03  0.90000D+01  0.13762D+02               0.15833D+00
```

7.3.3 D42WR1, R42WR1 2 元配置分散分析 (繰り返しデータ)

(1) **機 能**

因子 A と B がそれぞれ m_a 個と m_b 個の水準からなり, 各水準の組合せにおいて繰り返し数が n_{ij} である 2 元配置のデータ $\{x_{kij}\}(k = 1, \cdots, n_{ij}; i = 1, \cdots, m_a; j = 1, \cdots, m_b)$ に対して, 各水準の組合せの繰り返しにおける平均, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均を求め, 分散分析を行う.

なお, 各水準の組合せの繰り返しにおける平均, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均は以下のように定義される.

各水準の組合せの繰り返しにおける平均:

$$\bar{x}_{\cdot ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{kij}$$

因子 A の各水準に対する平均:

$$\bar{x}_{\cdot i \cdot} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m_b} n_{ij}} \sum_{j=1}^{m_b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{kij}$$

因子 A の各水準に対する分散:

$$V_{ai} = \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=1}^{m_b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (x_{kij} - \bar{x}_{\cdot i \cdot})^2$$

因子 B の各水準に対する平均:

$$\bar{x}_{\cdot \cdot j} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m_a} n_{ij}} \sum_{i=1}^{m_a} \sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{kij}$$

因子 B の各水準に対する分散:

$$V_{bj} = \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^{m_a} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (x_{kij} - \bar{x}_{\cdot \cdot j})^2$$

総平均:

$$\bar{x} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m_a} \sum_{j=1}^{m_b} n_{ij}} \sum_{i=1}^{m_a} \sum_{j=1}^{m_b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{kij}$$

ここで標本分散を用いる場合は $\alpha_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m_b} n_{ij}, \ \beta_j = \sum_{i=1}^{m_a} n_{ij}$, 不偏分散を用いる場合には $\alpha_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m_b} n_{ij} - 1, \ \beta_j = \sum_{i=1}^{m_a} n_{ij} - 1$ である.

また, 分散分析の結果は, それぞれ次式で定義される.

変動:

- 総変動

$$S_T = \sum_{i=1}^{m_a} \sum_{j=1}^{m_b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (x_{kij} - \bar{x})^2$$

- 因子 A の変動

$$S_A = \sum_{i=1}^{m_a}\sum_{j=1}^{m_b} n_{ij}(\bar{x}_{\cdot i\cdot} - \bar{x})^2$$

- 因子 B の変動

$$S_B = \sum_{i=1}^{m_a}\sum_{j=1}^{m_b} n_{ij}(\bar{x}_{\cdot\cdot j} - \bar{x})^2$$

- 交互作用の変動

$$S_{A\times B} = S_{AB} - (S_A + S_B)$$

ただしここで,

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^{m_a}\sum_{j=1}^{m_b} n_{ij}(\bar{x}_{\cdot ij} - \bar{x})^2$$

- 誤差変動

$$S_E = S_T - S_{AB}$$

自由度:

- 総変動の自由度

$$\phi_T = m_a \cdot m_b - 1$$

- 因子 A の変動の自由度

$$\phi_A = m_a - 1$$

- 因子 B の変動の自由度

$$\phi_B = m_b - 1$$

- 交互作用の変動の自由度

$$\phi_{A\times B} = (m_a - 1)(m_b - 1)$$

- 誤差変動の自由度

$$\phi_E = \sum_{i=1}^{m_a}\sum_{j=1}^{m_b} n_{ij} - m_a \cdot m_b$$

不偏分散:

- 因子 A の変動の不偏分散

$$V_A = \frac{S_A}{\phi_A}$$

- 因子 B の変動の不偏分散

$$V_B = \frac{S_B}{\phi_B}$$

- 交互作用の変動の不偏分散

$$V_{A\times B} = \frac{S_{A\times B}}{\phi_{A\times B}}$$

- 誤差変動の不偏分散

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E}$$

分散比:

- 因子 A の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_A = \frac{V_A}{V_E}$$

- 因子 B の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_B = \frac{V_B}{V_E}$$

- 交互作用の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_{A\times B} = \frac{V_{A\times B}}{V_E}$$

寄与率:

- 因子 A の変動の寄与率

$$P_A = \frac{S_A - \phi_A \cdot V_E}{S_T}$$

- 因子 B の変動の寄与率

$$P_B = \frac{S_B - \phi_B \cdot V_E}{S_T}$$

- 交互作用の変動の寄与率

$$P_{A\times B} = \frac{S_{A\times B} - \phi_{A\times B} \cdot V_E}{S_T}$$

- 誤差変動の寄与率

$$P_E = 1 - P_A - P_B - P_{A\times B}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D42WR1 (A, NA, MA, LA, LB, N, NR, Y, STATA, STATB, X1, V, ISW, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R42WR1 (A, NA, MA, LA, LB, N, NR, Y, STATA, STATB, X1, V, ISW, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	{D/R}	内容参照	入 力	観測値 (x_{kij}) **大きさ:** $(\mathrm{NA}, \mathrm{MA}, \mathrm{LB})$
2	NA	I	1	入 力	配列 A の第 1 次元の整合寸法
3	MA	I	1	入 力	配列 A の第 2 次元の整合寸法
4	LA	I	1	入 力	因子 A の水準の数 m_a
5	LB	I	1	入 力	因子 B の水準の数 m_b
6	N	I	MA,LB	入 力	各水準の組合せ (i, j) の繰り返し数 n_{ij} (NR $\geq$ 1 の場合は使用しない．)
7	NR	I	1	入 力	各水準の組合せの繰り返し数が等しい場合の繰り返し数 $n_{11} = \cdots = n_{1m_b} = n_{21} = \cdots = n_{2m_b} = \cdots = n_{m_a1} = \cdots = n_{m_am_b}$ 各水準の組合せの繰り返し数が等しくない場合は 0 以下の値を設定する．
8	Y	{D/R}	MA,LB	出 力	各水準の組合せ (i, j) の繰り返しにおける平均 $\bar{x}_{.ij}$
9	STATA	{D/R}	LA,2	出 力	因子 A の各水準の平均と分散 (注意事項 (a) 参照)
10	STATB	{D/R}	LB,2	出 力	因子 B の各水準の平均と分散 (注意事項 (a) 参照)
11	X1	{D/R}	1	出 力	総平均 $\bar{x}$
12	V	{D/R}	21	出 力	分散分析表 (分散分析表の格納方法については注意事項 (b) の表 7–4 参照．)
13	ISW	I	1	入 力	処理スイッチ 0: 不偏分散を計算 1: 標本分散を計算
14	WK	{D/R}	LA	ワーク	作業領域
15	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) ISW $= 0, 1$

(b) MA $\geq$ LA ≥ 1

(c) LB ≥ 1

(d) NR<1 かつ NA$\geq$N$(i, j) \geq 1$　　$(i = 1, \cdots$,LA ; j =1, $\ldots$,LB)
または NA$\geq$NR≥ 1

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (a) を満足しなかった.	ISW=0 として処理を続ける.
1010	LA=1 または LB=1 であった.	V(11)~V(21) に表現できる絶対値最大値を設定する．なお, STATA, STATB に格納される値については注意事項 (d) を参照のこと.
3000	制限条件 (b)~(d) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 因子 A および B の各水準ごとの平均と分散は配列 STATA および STATB に次のように格納する.

STATA $(i, 1)$: 因子 A の各水準ごとの平均 $\bar{x}_{\cdot i \cdot}$
STATA $(i, 2)$: 因子 A の各水準ごとの分散 V_{ai}
STATB $(j, 1)$: 因子 B の各水準ごとの平均 $\bar{x}_{\cdot\cdot j}$
STATB $(j, 2)$: 因子 B の各水準ごとの分散 V_{bj}
,　$i = 1, \cdots, \mathrm{LA}; j = 1, \cdots, \mathrm{LB}$

(b) 分散分析表の要素は配列 V に次のように格納する.

表 7–4　分散分析表の格納状態

要因	変動	自由度	不偏分散	分散比	寄与率
全体	V(1)	V(6)			
因子 A	V(2)	V(7)	V(11)	V(15)	V(18)
因子 B	V(3)	V(8)	V(12)	V(16)	V(19)
A×B	V(4)	V(9)	V(13)	V(17)	V(20)
誤差	V(5)	V(10)	V(14)		V(21)

(c) 不偏分散を計算した場合に得られる統計量は, 標本抽出が無限母集団からまたは有限母集団からの復元抽出を行った場合の母集団に適用できる．一方, 標本分散を計算した場合に得られる統計量は, 母集団と標本が一致する場合の母集団に適用できる.

(d) IERR=1010 で ISW=0 の場合は以下の処理を行う.

i. NR=1 かつ LA=1 のとき:
すべての STATB$(j, 2)$ $(j = 1, \cdots$,LB) に表現できる絶対値最大値を設定する.

ii. NR=1 かつ LB=1 のとき:
すべての STATA$(i, 2)$ $(i = 1, \cdots$,LA) に表現できる絶対値最大値を設定する.

iii. NR<1 かつ LA=1 である j について N(1, j)=1 のとき:
STATB(j, 2) に表現できる絶対値最大値を設定する.

iv. NR<1 かつ LB=1 である i について N(i, 1)=1 のとき:
STATA(i, 2) に表現できる絶対値最大値を設定する.

v. 6(d)i. ∼ 6(d)iv. のいずれでもない場合:
すべての STATA(i, 2) ($i = 1, \cdots$,LA) および STATB(j, 2)($j = 1, \cdots$,LB) は正常に計算される.

(7) **使用例**

(a) 問 題

因子 A と B を持つ繰り返し数が 2 の 2 元配置のデータが以下のような行列 X_1, X_2 で与えられたとき, 各水準の組合せの繰り返しにおける平均, それぞれの因子の各水準に対する平均と分散および総平均を求め, 分散分析を行う.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 7.9 & 9.8 & 13.2 & 13.1 \\ 10.3 & 14.6 & 15.9 & 9.5 \\ 9.1 & 12.1 & 11.1 & 7.0 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 8.7 & 9.3 & 14.0 & 12.0 \\ 11.0 & 14.0 & 14.6 & 8.5 \\ 8.6 & 12.9 & 10.0 & 8.2 \end{bmatrix}$$

ここで X_1 と X_2 はそれぞれ繰り返しの 1 回目および 2 回目の観測値を与える行列である.

(b) 入力データ

2 元配置のデータ X_1, X_2,

NA=100, MA=5, LA=3, LB=4, NR=2, ISW=0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B42WR1
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, MA = 5, LA = 3, LB = 4 )
      DIMENSION A(NA,MA,LB),N(MA,LB),Y(MA,LB)
      DIMENSION STATA(LA,2),STATB(LB,2),V(21),WK(MA)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =   0
      READ(5,*) NR
      READ(5,*) ISW
      DO 100 K=1,NR
      DO 101 I=1,LA
         READ(5,*) (A(K,I,J),J=1,LB)
  101 CONTINUE
  100 CONTINUE
      DO 110 I = 1,LA
      DO 111 J = 1,LB
         N(I,J) = 0
  111 CONTINUE
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) ISW,LA,LB,NR
      WRITE(6,6020)
      DO 120 I = 1,LA
         WRITE(6,6030) (N(I,J),J=1,LB)
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6040)
      DO 130 K=1,NR
         WRITE(6,6050) K
         DO 140 I=1,LA
            WRITE(6,6060) (A(K,I,J),J=1,LB)
  140    CONTINUE
  130 CONTINUE
      CALL D42WR1&
      (A,NA,MA,LA,LB,N,NR,Y,STATA,STATB,X1,V,ISW,WK,IERR)
      WRITE(6,6070) IERR
      WRITE(6,6080)
      DO 150 I = 1,LA
         WRITE(6,6090) (Y(I,J),J=1,LB)
  150 CONTINUE
      WRITE(6,6100) 'A'
      DO 160 L=1,LA
         WRITE(6,6110) L,STATA(L,1),STATA(L,2)
  160 CONTINUE
      WRITE(6,6100) 'B'
```

```
      DO 170 L=1,LB
         WRITE(6,6110) L,STATB(L,1),STATB(L,2)
  170 CONTINUE
      WRITE(6,6120) X1
      WRITE(6,6130) 'TOTAL',V(1),V(6)
      WRITE(6,6130) '  A  ',V(2),V(7),V(11),V(15),V(18)
      WRITE(6,6130) '  B  ',V(3),V(8),V(12),V(16),V(19)
      WRITE(6,6130) ' AXB ',V(4),V(9),V(13),V(17),V(20)
      WRITE(6,6140) 'ERROR',V(5),V(10),V(14),V(21)
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D42WR1 ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'ISW = ',I6,/,&
             /,7X,'LA = ',I6,5X,'LB = ',I6,/,&
             /,7X,'NR = ',I6)
 6020 FORMAT( /,7X,'NUMBER OF REPETITION N(I,J)',/)
 6030 FORMAT(  9X,5(2X,I6))
 6040 FORMAT( /,7X,'OBSERVATION MATRIX')
 6050 FORMAT( /,9X,'A(',I1,',I,J)',/)
 6060 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6070 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6080 FORMAT( /,7X,'MEAN FOR REPETITION',/)
 6090 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6100 FORMAT( /,7X,'VALUE OF EACH LEVEL OF FACTOR ',A,/,&
             /,10X,'LEVEL',7X,'MEAN',6X,'VARIANCE',/,&
              9X,35('-'))
 6110 FORMAT(  7X,I6,2X,F11.2,2X,D15.8)
 6120 FORMAT( /,7X,'MEAN OVER ALL LEVELS = ',D15.8,/,&
             /,7X,'ANALYSIS OF VARIANCE TABLE',/,&
             /,10X,'FACTOR',&
                 6X,'S.S.',9X,'D.F.',7X,'M.S.',8X,'V.R.',8X,'C.R.',/,&
              9X,69('-'))
 6130 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.2),3(1X,D11.4))
 6140 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.2),1X,D11.4,13X,D11.4)
 6150 FORMAT( /,7X,'VARIANCE OF EACH LEVEL OF FACTOR ',A,/)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D42WR1 ***

  ** INPUT **

      ISW =      0

      LA =      3     LB =      4

      NR =      2

      NUMBER OF REPETITION N(I,J)

               0       0       0       0
               0       0       0       0
               0       0       0       0

      OBSERVATION MATRIX

        A(1,I,J)

              7.90          9.80         13.20         13.10
             10.30         14.60         15.90          9.50
              9.10         12.10         11.10          7.00

        A(2,I,J)

              8.70          9.30         14.00         12.00
             11.00         14.00         14.60          8.50
              8.60         12.90         10.00          8.20

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      MEAN FOR REPETITION

              8.30          9.55         13.60         12.55
             10.65         14.30         15.25          9.00
              8.85         12.50         10.55          7.60

      VALUE OF EACH LEVEL OF FACTOR A

         LEVEL       MEAN      VARIANCE
        -----------------------------------
             1       11.00   0.54971429D+01
             2       12.30   0.77714286D+01
             3        9.88   0.41307143D+01

      VALUE OF EACH LEVEL OF FACTOR B

         LEVEL       MEAN      VARIANCE
        -----------------------------------
             1        9.27   0.13466667D+01
             2       12.12   0.47256667D+01
             3       13.13   0.49026667D+01
             4        9.72   0.55736667D+01

      MEAN OVER ALL LEVELS =  0.11058333D+02
```

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

FACTOR	S.S.	D.F.	M.S.	V.R.	C.R.
TOTAL	145.36	23.00			
A	23.56	2.00	0.1178D+02	0.2879D+02	0.1565D+00
B	62.62	3.00	0.2087D+02	0.5101D+02	0.4223D+00
AXB	54.27	6.00	0.9045D+01	0.2211D+02	0.3565D+00
ERROR	4.91	12.00	0.4092D+00		0.6474D-01

7.4 多元配置

7.4.1 D4MWRF, R4MWRF 多元配置分散分析

(1) **機 能**

因子数 m が最大 6 までで, 各因子 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ の水準数が $l_1, l_2, \cdots, l_m$, 各因子の水準の組合せに対する繰り返し数が一定の値 n である多元配置のデータ $x_{kj_1j_2\cdots j_m}(k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m; j_i = 1, \cdots, l_i)$ に対して, 分散分析を行う. このとき指定した交互作用を交絡することもできる. なお, 以下の説明のため因子 A_i に対応する演算 Σ_i と Δ_i を以下のように定義する.

$$\Sigma_i \equiv \sum_{j_i=1}^{l_i}, \quad \Delta_i \equiv l_i - \sum_{j_i=1}^{l_i}$$

各水準の組合せの繰り返しにおける平均および総平均は以下のように定義される.
各水準の組合せの繰り返しにおける平均:

$$\bar{x}_{\cdot j_1j_2\cdots j_m} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{kj_1j_2\cdots j_m}$$

総平均:

$$\bar{x} = \frac{1}{n\prod_{i=1}^{m} l_i}\Sigma_1\Sigma_2\cdots\Sigma_m\sum_{k=1}^{n} x_{kj_1j_2\cdots j_m}$$

また, 分散分析の結果は, それぞれ次式で定義される.
変動:

- 総変動

$$S_T = \Sigma_1\Sigma_2\cdots\Sigma_m\sum_{k=1}^{n}(x_{kj_1j_2\cdots j_m} - \bar{x})^2$$

- 因子 A_i の変動

$$S_{A_i} = \frac{n}{l_i\prod_{j=1}^{m} l_j}\Sigma_i(\Sigma_1\Sigma_2\cdots\Sigma_{i-1}\Delta_i\Sigma_{i+1}\cdots\Sigma_m\bar{x}_{\cdot j_1j_2\cdots j_m})^2$$

- $s(s \le m)$ 個の因子 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$ の交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動

$$\begin{aligned} S_{A_{i_1}\times A_{i_2}\times\cdots\times A_{i_s}} &= \frac{n}{(\prod_{k=1}^{s} l_{i_s})\cdot(\prod_{k=1}^{m} l_k)} \\ &\times \Sigma_{i_1}\Sigma_{i_2}\cdots\Sigma_{i_s}(\Sigma_1\cdots\Sigma_{i_1-1}\Delta_{i_1}\Sigma_{i_1+1}\cdots \\ &\quad \Sigma_{i_2-1}\Delta_{i_2}\Sigma_{i_2+1}\cdots\Sigma_{i_s-1}\Delta_{i_s}\Sigma_{i_s+1}\cdots\Sigma_m\bar{x}_{\cdot j_1j_2\cdots \mathrm{j}_m})^2 \end{aligned}$$

- 誤差変動
  繰り返しのない場合:

$$\begin{aligned} S_E &= S_T - (\text{各因子の変動の和}) \\ &- (\text{最高次の交互作用 } [A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m] \\ &\quad \text{以外の交互作用の変動の和}) \end{aligned}$$

繰り返しのある場合:

$$S_E = S_T - (\text{各因子の変動の和}) - (\text{交互作用の変動の和})$$

自由度:

- 総変動の自由度
$$\phi_T = n\prod_{i=1}^{m} l_i - 1$$
- 因子 A_i の変動の自由度
$$\phi_A = l_i - 1$$
- 交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動の自由度
$$\phi_{A_{i_1}\times A_{i_2}\times\cdots\times A_{i_s}} = \prod_{k=1}^{s}(l_{i_k} - 1)$$
- 誤差変動の自由度
繰り返しのない場合:
$$\begin{aligned}\phi_E &= \phi_T - (\text{各因子の変動の自由度の和}) \\ &- (\text{最高次数の交互作用以外の交互作用の変動の自由度の和})\end{aligned}$$
繰り返しのある場合:
$$\begin{aligned}\phi_E &= \phi_T - (\text{各因子の変動の自由度の和}) \\ &- (\text{交互作用の変動の自由度の和})\end{aligned}$$

不偏分散:

- 因子 A_i の変動の不偏分散
$$V_{A_i} = \frac{S_{A_i}}{\phi_{A_i}}$$
- 交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動の不偏分散
$$V_{A_{i_1}\times A_{i_2}\times\cdots\times A_{i_s}} = \frac{S_{A_{i_1}\times A_{i_2}\times\cdots\times A_{i_s}}}{\phi_{A_{i_1}\times A_{i_2}\times\cdots\times A_{i_s}}}$$
ただし最高次数の交互作用の変動の不偏分散は繰り返しのある場合のみ定義できる.
- 誤差変動の不偏分散
$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E}$$

分散比:

- 因子 A_i の変動の不偏分散に対する分散比
$$F_{A_i} = \frac{V_{A_i}}{V_E}$$
- 交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動の不偏分散に対する分散比
$$F_{A_{i_1}\times A_{i_2}\times\cdots\times A_{i_s}} = \frac{V_{A_{i_1}\times A_{i_2}\times\cdots\times A_{i_s}}}{V_E}$$
ただし最高次数の交互作用の変動の分散比は繰り返しのある場合のみ定義できる.

寄与率:

- 因子 A_i の変動の寄与率

$$P_{A_i} = \frac{S_{A_i} - \phi_{A_i} \cdot V_E}{S_T}$$

- 交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動の寄与率

$$P_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} = \frac{S_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} - \phi_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} \cdot V_E}{S_T}$$

- 誤差変動の寄与率

  繰り返しのない場合:

$$\begin{aligned} P_E &= \phi_T - (\text{各因子の変動の寄与率の和}) \\ &- (\text{最高次数の交互作用以外の交互作用の変動の寄与率の和}) \end{aligned}$$

  繰り返しのある場合:

$$\begin{aligned} P_E &= \phi_T - (\text{各因子の変動の寄与率の和}) \\ &- (\text{交互作用の変動の寄与率の和}) \end{aligned}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D4MWRF (A, NA, N, LT, M, IPT, IPN, Y, X1, V, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R4MWRF (A, NA, N, LT, M, IPT, IPN, Y, X1, V, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{ \begin{array}{l} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{array} \right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	NA,M1	入 力	観測値 ($x_{k\beta}$)　(注意事項 (a) 参照) ただし $\mathrm{M1} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{M}} \mathrm{LT(i)}$
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	N	I	1	入 力	各水準の組合せの繰り返し数 n
4	LT	I	M	入 力	各因子の水準の数 l_i
5	M	I	1	入 力	因子数 m
6	IPT	I	M2	入 力	交絡する要因の番号 (注意事項 (b) 参照) ただし IPN $>$ 0 のときは M2 $=$ IPN で IPN $=$ 0 のときは引数 IPT はダミーでよい.
7	IPN	I	1	入 力	交絡する要因数
8	Y	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	M1	出 力	各水準の組合せの繰り返しにおける平均 $\bar{x}_{\cdot\beta}$.　(注意事項 (a) 参照). ただし $\mathrm{M1} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{M}} \mathrm{LT(i)}$
9	X1	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	1	出 力	総平均 $\bar{x}$
10	V	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	$2^{\mathrm{M}}+1, 5$	出 力	分散分析表 (分散分析表の格納方法については注意事項 (c) の表 7−5 参照.)
11	WK	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	M3	ワーク	作業領域. ただし $\mathrm{M3} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} (\mathrm{LT(i)}+1)$
12	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $\mathrm{NA} \geq \mathrm{N} \geq \left\{ \begin{array}{ll} 2 & (\mathrm{M}=1) \\ 1 & (\mathrm{M}>1) \end{array} \right.$

(b) $1 \leq \mathrm{M} \leq 6$

(c) $\mathrm{LT}(i) \geq 1 \quad (i=1,\cdots,\mathrm{M})$

(d) $0 \leq \mathrm{IPN} \leq \left\{ \begin{array}{ll} 2^{\mathrm{M}}-2 & (\mathrm{N}=1) \\ 2^{\mathrm{M}}-1 & (\mathrm{N}>1) \end{array} \right.$

(e) $2 \leq \mathrm{IPT}(i) \leq \left\{ \begin{array}{ll} 2^{\mathrm{M}}-1 & (\mathrm{N}=1) \\ 2^{\mathrm{M}} & (\mathrm{N}>1) \end{array} \right. \quad (i=1,\cdots,\mathrm{M})$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	ある i ($i = 1, 2, \cdots$M) について LT(i) $= 1$ であった.	分散分析表の変動と自由度の項以外には表現できる絶対値の最大値を設定する.
3000	制限条件 (a)~(e) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) m 個の因子 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ を持ち, 各因子の水準の組合せについての繰り返し数が一定の値 n である多元配置のデータは $m+1$ 個の添字を用いて

$$x_{kj_1j_2\cdots j_m}\ (k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, m; j_i = 1, \cdots, l_i)$$

のように表されるが, 本サブルーチンでは以下のようにして多元配置のデータを 2 個の添字で表し, それを実行列 (2 次元配列型) として配列 A に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$x_{kj_1j_2\cdots j_m} \to x_{k\beta}$$

ここで

$$\beta = j_1 + \sum_{i=2}^{m}(j_i \prod_{k=1}^{i-1} l_k)$$

同様にして各水準の組合せの繰り返しについての平均

$$\bar{x}_{\cdot j_1j_2\cdots j_m}\ (i = 1, \cdots, m; j_i = 1, \cdots, l_i)$$

を以下のように 1 個の添字で表し, 1 次元ベクトルとして配列 Y に格納する.

$$\bar{x}_{\cdot j_1j_2\cdots j_m} \to \bar{x}_{\cdot\beta}$$

ここで

$$\beta = j_1 + \sum_{i=2}^{m}(j_i \prod_{k=1}^{i-1} l_k)$$

(b) 分散分析の対象となる要因には以下のように番号が付けられている.

- 1 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	誤差

- 2 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	A_2
4	$A_1 \times A_2$
5	誤差

- 3 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	A_2
4	$A_1 \times A_2$
5	A_3
6	$A_1 \times A_3$
7	$A_2 \times A_3$
8	$A_1 \times A_2 \times A_3$
9	誤差

- 4 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	A_2
4	$A_1 \times A_2$
5	A_3
6	$A_1 \times A_3$
7	$A_2 \times A_3$
8	$A_1 \times A_2 \times A_3$
9	A_4
10	$A_1 \times A_4$
11	$A_2 \times A_4$
12	$A_1 \times A_2 \times A_4$
13	$A_3 \times A_4$
14	$A_1 \times A_3 \times A_4$
15	$A_2 \times A_3 \times A_4$
16	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$
17	誤差

- 5 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	A_2
4	$A_1 \times A_2$
5	A_3
6	$A_1 \times A_3$
7	$A_2 \times A_3$
8	$A_1 \times A_2 \times A_3$
9	A_4
10	$A_1 \times A_4$
11	$A_2 \times A_4$
12	$A_1 \times A_2 \times A_4$
13	$A_3 \times A_4$
14	$A_1 \times A_3 \times A_4$
15	$A_2 \times A_3 \times A_4$
16	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$
17	A_5
18	$A_1 \times A_5$
19	$A_2 \times A_5$
20	$A_1 \times A_2 \times A_5$
21	$A_3 \times A_5$
22	$A_1 \times A_3 \times A_5$
23	$A_2 \times A_3 \times A_5$
24	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_5$
25	$A_4 \times A_5$
26	$A_1 \times A_4 \times A_5$
27	$A_2 \times A_4 \times A_5$
28	$A_1 \times A_2 \times A_4 \times A_5$
29	$A_3 \times A_4 \times A_5$
30	$A_1 \times A_3 \times A_4 \times A_5$
31	$A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$
32	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$
33	誤差

- 6 元配置

要因番号	要因	要因番号	要因
1	全体	34	$A_1 \times A_6$
2	A_1	35	$A_2 \times A_6$
3	A_2	36	$A_1 \times A_2 \times A_6$
4	$A_1 \times A_2$	37	$A_3 \times A_6$
5	A_3	38	$A_1 \times A_3 \times A_6$
6	$A_1 \times A_3$	39	$A_2 \times A_3 \times A_6$
7	$A_2 \times A_3$	40	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_6$
8	$A_1 \times A_2 \times A_3$	41	$A_4 \times A_6$
9	A_4	42	$A_1 \times A_4 \times A_6$
10	$A_1 \times A_4$	43	$A_2 \times A_4 \times A_6$
11	$A_2 \times A_4$	44	$A_1 \times A_2 \times A_4 \times A_6$
12	$A_1 \times A_2 \times A_4$	45	$A_3 \times A_4 \times A_6$
13	$A_3 \times A_4$	46	$A_1 \times A_3 \times A_4 \times A_6$
14	$A_1 \times A_3 \times A_4$	47	$A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_6$
15	$A_2 \times A_3 \times A_4$	48	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_6$
16	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$	49	$A_5 \times A_6$
17	A_5	50	$A_1 \times A_5 \times A_6$
18	$A_1 \times A_5$	51	$A_2 \times A_5 \times A_6$
19	$A_2 \times A_5$	52	$A_1 \times A_2 \times A_5 \times A_6$
20	$A_1 \times A_2 \times A_5$	53	$A_3 \times A_5 \times A_6$
21	$A_3 \times A_5$	54	$A_1 \times A_3 \times A_5 \times A_6$
22	$A_1 \times A_3 \times A_5$	55	$A_2 \times A_3 \times A_5 \times A_6$
23	$A_2 \times A_3 \times A_5$	56	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_5 \times A_6$
24	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_5$	57	$A_4 \times A_5 \times A_6$
25	$A_4 \times A_5$	58	$A_1 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
26	$A_1 \times A_4 \times A_5$	59	$A_2 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
27	$A_2 \times A_4 \times A_5$	60	$A_1 \times A_2 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
28	$A_1 \times A_2 \times A_4 \times A_5$	61	$A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
29	$A_3 \times A_4 \times A_5$	62	$A_1 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
30	$A_1 \times A_3 \times A_4 \times A_5$	63	$A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
31	$A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$	64	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
32	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$	65	誤差
33	A_6		

(c) 分散分析表の要素は配列 V に次のように格納する．

表 7–5　分散分析表の格納状態

要因番号	変動	自由度	不偏分散	分散比	寄与率
1	V(1, 1)	V(1, 2)	*	*	*
2	V(2, 1)	V(2, 2)	V(2, 3)	V(2, 4)	V(2, 5)
3	V(3, 1)	V(3, 2)	V(3, 3)	V(3, 4)	V(3, 5)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N1 − 1	V(N1 − 1, 1)	V(N1 − 1, 2)	V(N1 − 1, 3)	V(N1 − 1, 4)	V(N1 − 1, 5)
N1	V(N1, 1)	V(N1, 2)	V(N1, 3)	*	V(N1, 5)

ここで $\mathrm{N1} = 2^{\mathrm{M}} + 1$ である．なお対応する分散分析表の項目がない配列要素 V(1, 3), V(1, 4), V(1, 5) および V(N1, 4) には表現できる絶対値最大値が設定される．また繰り返しがない場合には, 最高次数の交互作用の要因 (要因番号 N1 − 1) に対する各項の値は 0.0 に設定される．さらに, 誤差に交絡するよう配列 IPT で指定した要因に対する各項も 0.0 に設定される．

(7) **使用例**

(a) 問 題

各因子に対する水準数がそれぞれ 3 で繰り返し数が 2 である 3 元配置のデータに対して, 分散分析を行う. ただし, 観測値行列 X の転置行列 X^T は以下のように与えられているものとする.

$$\begin{bmatrix} 5.5 & 5.4 \\ 6.3 & 6.5 \\ 6.9 & 6.8 \\ 5.4 & 5.3 \\ 6.5 & 6.3 \\ 6.9 & 6.5 \\ 5.5 & 5.3 \\ 6.5 & 6.2 \\ 7.0 & 6.8 \\ 4.9 & 4.6 \\ 5.7 & 5.6 \\ 6.2 & 6.0 \\ 5.0 & 5.2 \\ 6.1 & 6.5 \\ 6.6 & 6.5 \\ 4.8 & 4.2 \\ 5.7 & 5.4 \\ 6.9 & 6.4 \\ 4.2 & 4.0 \\ 5.0 & 4.9 \\ 5.4 & 5.3 \\ 4.5 & 4.3 \\ 5.2 & 5.0 \\ 6.1 & 6.0 \\ 4.9 & 4.3 \\ 5.3 & 5.2 \\ 6.4 & 6.3 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

観測値行列 X, NA=2, N=2, M=3, IPN=0,
LT (1) =3, LT (2) =3, LT (3) =3

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B4MWRF
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 2, M = 3, NIPT = 7 )
      PARAMETER( M1 = 27, M2 = 64, M3 = 9 )
      DIMENSION A(NA,M1),LT(M),IPT(NIPT),Y(M1),V(M3,5),WK(M2)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR  = 0
      READ(5,*) N
      LT(1) = 3
      LT(2) = 3
      LT(3) = 3
      READ(5,*) IPN
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,M1)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) N,M
      WRITE(6,6020) (LT(I),I=1,3)
      WRITE(6,6030) IPN
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6040) I
         WRITE(6,6050) (A(I,J),J=1,M1)
  110 CONTINUE
      CALL D4MWRF(A,NA,N,LT,M,IPT,IPN,Y,X1,V,WK,IERR)
      WRITE(6,6060) IERR
      WRITE(6,6070)
      WRITE(6,6050) (Y(I),I=1,M1)
      WRITE(6,6080) X1
      WRITE(6,6090) (V(1,J),J=1,2)
      DO 120 I = 2,M3-1
         WRITE(6,6100) I,(V(I,J),J=1,5)
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6110) (V(M3,J),J=1,3),V(M3,5)
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D4MWRF ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'N = ',I6,5X,'M = ',I6,/,&
             /,7X,'NUMBER OF LEVEL OF EACH FACTOR',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,I6))
 6030 FORMAT( /,7X,'NUMBER OF POOLING SOURCE OF VARIANCES = ',I6,/,&
             /,7X,'OBSERVATION MATRIX')
 6040 FORMAT( /,9X,'A(',I1,',J),J=1,27',/)
 6050 FORMAT(      6(8X,5(1X,F11.2),/))
 6060 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6070 FORMAT( /,7X,'MEAN FOR REPETITION',/)
 6080 FORMAT( /,7X,'MEAN OVER ALL LEVELS = ',F11.2,/,&
             /,7X,'ANALYSIS OF VARIANCE TABLE',/,&
             /,10X,'FACTOR',&
                  7X,'S.S.',8X,'D.F.',5X,'M.S.',8X,'V.R.',8X,'C.R.',/,&
              9X,67('-'))
 6090 FORMAT(  10X,'TOTAL',2(1X,F11.2),3(1X,D11.4))
 6100 FORMAT(  7X,I6,2X,2(1X,F11.2),3(1X,D11.4))
 6110 FORMAT(  10X,'ERROR',2(1X,F11.2),1X,D11.4,13X,D11.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D4MWRF ***

 ** INPUT **

    N =      2     M =      3

    NUMBER OF LEVEL OF EACH FACTOR

           3       3       3

    NUMBER OF POOLING SOURCE OF VARIANCES =      0

    OBSERVATION MATRIX

      A(1,J),J=1,27

             5.50        6.30        6.90        5.40        6.50
             6.90        5.50        6.50        7.00        4.90
             5.70        6.20        5.00        6.10        6.60
             4.80        5.70        6.90        4.20        5.00
             5.40        4.50        5.20        6.10        4.90
             5.30        6.40

      A(2,J),J=1,27

             5.40        6.50        6.80        5.30        6.30
             6.50        5.30        6.20        6.80        4.60
             5.60        6.00        5.20        6.50        6.50
             4.20        5.40        6.40        4.00        4.90
             5.30        4.30        5.00        6.00        4.30
             5.20        6.30

 ** OUTPUT **

    IERR =      0

    MEAN FOR REPETITION

             5.45        6.40        6.85        5.35        6.40
             6.70        5.40        6.35        6.90        4.75
             5.65        6.10        5.10        6.30        6.55
             4.50        5.55        6.65        4.10        4.95
             5.35        4.40        5.10        6.05        4.60
             5.25        6.35

    MEAN OVER ALL LEVELS =        5.67

    ANALYSIS OF VARIANCE TABLE
```

FACTOR	S.S.	D.F.	M.S.	V.R.	C.R.
TOTAL	36.09	53.00			
2	21.59	2.00	0.1080D+02	0.2886D+03	0.5962D+00
3	0.70	2.00	0.3513D+00	0.9391D+01	0.1739D-01
4	0.51	4.00	0.1282D+00	0.3428D+01	0.1007D-01
5	10.35	2.00	0.5176D+01	0.1384D+03	0.2847D+00
6	0.31	4.00	0.7852D-01	0.2099D+01	0.4556D-02
7	1.25	4.00	0.3130D+00	0.8366D+01	0.3054D-01
8	0.36	8.00	0.4449D-01	0.1189D+01	0.1570D-02
ERROR	1.01	27.00	0.3741D-01		0.5493D-01

7.4.2 D4MWRM, R4MWRM 多元配置分散分析 (欠測値あり)

(1) **機 能**

因子数 m が最大 6 までで, 各因子 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ の水準数が $l_1, l_2, \cdots, l_m$, 各因子の水準の組合せに対して繰り返しがなく, n_s 個の水準の組み合わせについてデータが得られていない多元配置のデータ $x_{j_1 j_2 \cdots j_m} (i = 1, \cdots, m; j_i = 1, \cdots, l_i)$ に対して, 分散分析を行う. このとき指定した交互作用を交絡することもできる. 得られていない水準の組み合わせのデータを欠測値と呼び, 各統計量の計算においては, 欠測値については, その推定値で代用する.

なお, 以下の説明のため因子 A_i に対応する演算 Σ_i と Δ_i を以下のように定義する.

$$\Sigma_i \equiv \sum_{j_i=1}^{l_i}, \quad \Delta_i \equiv l_i - \sum_{j_i=1}^{l_i}$$

総平均は以下のように定義される.

総平均:

$$\bar{x} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} l_i} \Sigma_1 \Sigma_2 \cdots \Sigma_m \sum_{k=1}^{n} x_{k j_1 j_2 \cdots j_m}$$

また, 分散分析の結果は, それぞれ次式で定義される.

変動:

- 総変動

$$S_T = \Sigma_1 \Sigma_2 \cdots \Sigma_m \sum_{k=1}^{n} (x_{k j_1 j_2 \cdots j_m} - \bar{x})^2$$

- 因子 A_i の変動

$$S_{A_i} = \frac{1}{l_i \prod_{j=1}^{m} l_j} \Sigma_i (\Sigma_1 \Sigma_2 \cdots \Sigma_{i-1} \Delta_i \Sigma_{i+1} \cdots \Sigma_m x_{j_1 j_2 \cdots j_m})^2$$

- $s (s < m)$ 個の因子 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$ の交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動

$$\begin{aligned} S_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} &= \frac{n}{(\prod_{k=1}^{s} l_{i_s}) \cdot (\prod_{k=1}^{m} l_k)} \\ &\times \Sigma_{i_1} \Sigma_{i_2} \cdots \Sigma_{i_s} (\Sigma_1 \cdots \Sigma_{i_1 - 1} \Delta_{i_1} \Sigma_{i_1 + 1} \cdots \\ &\quad \Sigma_{i_2 - 1} \Delta_{i_2} \Sigma_{i_2 + 1} \cdots \Sigma_{i_s - 1} \Delta_{i_s} \Sigma_{i_s + 1} \cdots \Sigma_m x_{j_1 j_2 \cdots j_m})^2 \end{aligned}$$

  ただし, 最高次数の交互作用 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ の変動は定義されない.

- 誤差変動

$$\begin{aligned} S_E &= S_T - (\text{各因子の変動の和}) \\ &- (\text{最高次の交互作用 } [A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m] \\ &\quad \text{以外の交互作用の変動の和}) \end{aligned}$$

自由度:

- 総変動の自由度

$$\phi_T = n\prod_{i=1}^{m} l_i - n_s - 1$$

- 因子 A_i の変動の自由度

$$\phi_A = l_i - 1$$

- 交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動の自由度

$$\phi_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} = \prod_{k=1}^{s}(l_{i_k} - 1)$$

- 誤差変動の自由度

$$\begin{aligned}\phi_E &= \phi_T - (\text{各因子の変動の自由度の和}) \\ &- (\text{最高次数の交互作用以外の交互作用の変動の自由度の和}) - n_s\end{aligned}$$

不偏分散:

- 因子 A_i の変動の不偏分散

$$V_{A_i} = \frac{S_{A_i}}{\phi_{A_i}}$$

- 交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動の不偏分散

$$V_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} = \frac{S_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}}}{\phi_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}}}$$

  ただし最高次数の交互作用の変動の不偏分散は定義されない.

- 誤差変動の不偏分散

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E}$$

分散比:

- 因子 A_i の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_{A_i} = \frac{V_{A_i}}{V_E}$$

- 交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動の不偏分散に対する分散比

$$F_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} = \frac{V_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}}}{V_E}$$

  ただし最高次数の交互作用の変動の分散比は定義されない.

寄与率:

- 因子 A_i の変動の寄与率

$$P_{A_i} = \frac{S_{A_i} - \phi_{A_i} \cdot V_E}{S_T}$$

- 交互作用 $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}$ の変動の寄与率

$$P_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} = \frac{S_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} - \phi_{A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_s}} \cdot V_E}{S_T}$$

  ただし最高次数の交互作用の変動の寄与率は定義されない.

- 誤差変動の寄与率

$$
\begin{aligned}
P_E &= \phi_T - (\text{各因子の変動の寄与率の和}) \\
&- (\text{最高次数の交互作用以外の交互作用の変動の寄与率の和})
\end{aligned}
$$

欠測値の推定:
欠測値の推定値は誤差変動 S_E を最小にするように定める. S_E を最小にする推定値を求めるには, 欠測値

$$x_{s_1 s_2 \ldots s_m} \ ((s_1, s_2, \ldots, s_m) \in S)$$

を未知数とする方程式

$$\frac{\partial S_E}{\partial x_{st}} = 0 \qquad ((s,t) \in S)$$

を解けばよい. ここで S は欠測値になっている水準の組み合わせの集合とする. S_E は観測データの 2 次式であるから, この方程式は, 欠測値を未知数とする n_s 元連立 1 次方程式である.
例えば, 各因子 A, B, C の水準数が 3 で, x_{132} と x_{322} が欠測値となっている 3 元配置のデータ

$$X_1 = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 10 \\ 11 & 10 & 12 \\ 12 & x_{132} & 13 \end{bmatrix} \qquad \text{因子 A の水準 1 のデータ}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 11 \\ 9 & 10 & 12 \end{bmatrix} \qquad \text{因子 A の水準 2 のデータ}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 11 \\ 10 & x_{322} & 12 \\ 12 & 8 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{因子 A の水準 3 のデータ}$$

について, 誤差変動は

$$
\begin{aligned}
S_E &= S_T - S_A - S_B - S_C - S_{A\times B} - S_{B\times C} - S_{C\times A} \\
&= 69714 - 5400x_{132} - 5724x_{322} + 216x_{132}^2 + 216x_{322} + 108x_{132}x_{322}
\end{aligned}
$$

である. これを x_{132}, x_{322} について微分することにより連立 1 次方程式

$$\frac{\partial S_E}{\partial x_{132}} = -5400 + 432x_{132} + 108x_{322} = 0$$

$$\frac{\partial S_E}{\partial x_{322}} = -5724 + 108x_{132} + 432x_{322} = 0$$

が得られ, これを解くことにより, 欠測値の推定値 $x_{132} = 9.8$, $x_{322} = 10.8$ が求められる.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:
CALL D4MWRM (A, LT, M, IST, ISN, IPT, IPN, X1, V, IWK, WK, IERR)
単精度サブルーチン:
CALL R4MWRM (A, LT, M, IST, ISN, IPT, IPN, X1, V, IWK, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D, R}	M1	入 力	観測値 (x_β) (注意事項 (a) 参照) ただし, $\mathrm{M1} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{M}} \mathrm{LT(i)}$
				出 力	観測値 (x_β). ただし, 欠測値に対応する要素にはその推定値が格納される.
2	LT	I	M	入 力	各因子の水準の数 l_i
3	M	I	1	入 力	因子数 m
4	IST	I	ISN,M	入 力	欠測値になっている水準の組み合わせの情報 (注意事項 (b) 参照)
5	ISN	I	1	入 力	欠測値の個数 n_s
6	IPT	I	M2	入 力	交絡する要因の番号 (注意事項 (c) 参照) ただし IPN $>$ 0 のときは M2 = IPN で IPN = 0 のときは引数 IPT はダミーでよい.
7	IPN	I	1	入 力	交絡する要因数
8	X1	{D, R}	1	出 力	総平均 $\bar{x}$
9	V	{D, R}	$2^{\mathrm{M}}+1, 5$	出 力	分散分析表 (分散分析表の格納方法については注意事項 (c) の表 7–6 参照.)
10	IWK	I	M3	ワーク	作業領域. ただし $\mathrm{M3} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{M}} \mathrm{LT(i)} + \mathrm{ISN}$
11	WK	{D, R}	M4	ワーク	作業領域. ただし $\mathrm{M4} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{M}} (\mathrm{LT(i)}+1) + \mathrm{ISN}^2 + 2 \times \mathrm{ISN} + 1$
12	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $1 \leq \mathrm{M} \leq 6$

(b) $\mathrm{LT}(i) \geq 1 \quad (i = 1, \cdots, \mathrm{M})$

(c) $0 \leq \mathrm{IPN} \leq 2^{\mathrm{M}} - 2$

(d) $2 \leq \mathrm{IPT}(i) \leq 2^{\mathrm{M}} - 1 \qquad (i = 1, \cdots, \mathrm{M})$

(e) $1 \leq \mathrm{ISN} < \prod_{i=1}^{\mathrm{M}} (\mathrm{LT}(i) - 1)$

(f) $1 \leq \mathrm{IST}(i, j) \leq \mathrm{LT}(j) \quad (i = 1, 2, \cdots, \mathrm{ISN}\ ;\ j = 1, 2, \cdots, \mathrm{M})$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
2000	欠測値の推定値を計算できなかった.	欠測値のデータを欠測値以外のデータの平均値で代用して処理を続ける.
3000	制限条件 (a)∼(f) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) m 個の因子 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ を持つ繰り返しのない多元配置のデータは m 個の添字を用いて

$$x_{j_1 j_2 \cdots j_m} \ (i = 1, \cdots, m; j_i = 1, \cdots, l_i)$$

のように表されるが, 本サブルーチンでは以下のようにして多元配置のデータを 1 個の添字で表し, それを実ベクトル (1 次元配列) として配列 A に格納する.

$$x_{j_1 j_2 \cdots j_m} \rightarrow x_\beta$$

ここで

$$\beta = j_1 + \sum_{i=2}^{m} (j_i \prod_{k=1}^{i-1} l_k)$$

(b) i 番目の欠測値の水準の組み合わせ $(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ を注意事項 (a) の方法で一つの整数 β で表して, その値を IST (i) に格納する.

(c) 分散分析の対象となる要因には以下のように番号が付けられている.

- 1 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	誤差

- 2 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	A_2
4	誤差

- 3 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	A_2
4	$A_1 \times A_2$
5	A_3
6	$A_1 \times A_3$
7	$A_2 \times A_3$
8	誤差

- 4 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	A_2
4	$A_1 \times A_2$
5	A_3
6	$A_1 \times A_3$
7	$A_2 \times A_3$
8	$A_1 \times A_2 \times A_3$
9	A_4
10	$A_1 \times A_4$
11	$A_2 \times A_4$
12	$A_1 \times A_2 \times A_4$
13	$A_3 \times A_4$
14	$A_1 \times A_3 \times A_4$
15	$A_2 \times A_3 \times A_4$
16	誤差

- 5 元配置

要因番号	要因
1	全体
2	A_1
3	A_2
4	$A_1 \times A_2$
5	A_3
6	$A_1 \times A_3$
7	$A_2 \times A_3$
8	$A_1 \times A_2 \times A_3$
9	A_4
10	$A_1 \times A_4$
11	$A_2 \times A_4$
12	$A_1 \times A_2 \times A_4$
13	$A_3 \times A_4$
14	$A_1 \times A_3 \times A_4$
15	$A_2 \times A_3 \times A_4$
16	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$
17	A_5
18	$A_1 \times A_5$
19	$A_2 \times A_5$
20	$A_1 \times A_2 \times A_5$
21	$A_3 \times A_5$
22	$A_1 \times A_3 \times A_5$
23	$A_2 \times A_3 \times A_5$
24	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_5$
25	$A_4 \times A_5$
26	$A_1 \times A_4 \times A_5$
27	$A_2 \times A_4 \times A_5$
28	$A_1 \times A_2 \times A_4 \times A_5$
29	$A_3 \times A_4 \times A_5$
30	$A_1 \times A_3 \times A_4 \times A_5$
31	$A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$
32	誤差

- 6 元配置

要因番号	要因	要因番号	要因
1	全体	33	A_6
2	A_1	34	$A_1 \times A_6$
3	A_2	35	$A_2 \times A_6$
4	$A_1 \times A_2$	36	$A_1 \times A_2 \times A_6$
5	A_3	37	$A_3 \times A_6$
6	$A_1 \times A_3$	38	$A_1 \times A_3 \times A_6$
7	$A_2 \times A_3$	39	$A_2 \times A_3 \times A_6$
8	$A_1 \times A_2 \times A_3$	40	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_6$
9	A_4	41	$A_4 \times A_6$
10	$A_1 \times A_4$	42	$A_1 \times A_4 \times A_6$
11	$A_2 \times A_4$	43	$A_2 \times A_4 \times A_6$
12	$A_1 \times A_2 \times A_4$	44	$A_1 \times A_2 \times A_4 \times A_6$
13	$A_3 \times A_4$	45	$A_3 \times A_4 \times A_6$
14	$A_1 \times A_3 \times A_4$	46	$A_1 \times A_3 \times A_4 \times A_6$
15	$A_2 \times A_3 \times A_4$	47	$A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_6$
16	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$	48	$A_1 \times A_2 \times A_3 A_4 \times A_6$
17	A_5	49	$A_5 \times A_6$
18	$A_1 \times A_5$	50	$A_1 \times A_5 \times A_6$
19	$A_2 \times A_5$	51	$A_2 \times A_5 \times A_6$
20	$A_1 \times A_2 \times A_5$	52	$A_1 \times A_2 \times A_5 \times A_6$
21	$A_3 \times A_5$	53	$A_3 \times A_5 \times A_6$
22	$A_1 \times A_3 \times A_5$	54	$A_1 \times A_3 \times A_5 \times A_6$
23	$A_2 \times A_3 \times A_5$	55	$A_2 \times A_3 \times A_5 \times A_6$
24	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_5$	56	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_5 \times A_6$
25	$A_4 \times A_5$	57	$A_4 \times A_5 \times A_6$
26	$A_1 \times A_4 \times A_5$	58	$A_1 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
27	$A_2 \times A_4 \times A_5$	59	$A_2 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
28	$A_1 \times A_2 \times A_4 \times A_5$	60	$A_1 \times A_2 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
29	$A_3 \times A_4 \times A_5$	61	$A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
30	$A_1 \times A_3 \times A_4 \times A_5$	62	$A_1 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
31	$A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$	63	$A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$
32	$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$	64	誤差

(d) 分散分析表の要素は配列 V に次のように格納する.

表 7–6　分散分析表の格納状態

要因番号	変動	自由度	不偏分散	分散比	寄与率
1	V(1, 1)	V(1, 2)	∗	∗	∗
2	V(2, 1)	V(2, 2)	V(2, 3)	V(2, 4)	V(2, 5)
3	V(3, 1)	V(3, 2)	V(3, 3)	V(3, 4)	V(3, 5)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N1 − 1	V(N1 − 1, 1)	V(N1 − 1, 2)	V(N1 − 1, 3)	V(N1 − 1, 4)	V(N1 − 1, 5)
N1	V(N1, 1)	V(N1, 2)	V(N1, 3)	∗	V(N1, 5)

ここで $\mathrm{N1} = 2^{\mathrm{M}}$ である. なお対応する分散分析表の項目がない配列要素 V(1, 3), V(1, 4), V(1, 5) および V(N1, 4) には表現できる絶対値最大値が設定される. 誤差に交絡するよう配列 IPT で指定した要因に対する各項は 0.0 に設定される.

(7) **使用例**

(a) 問 題

各因子に対する水準数がそれぞれ 3 で繰り返しのない 3 元配置のデータに対して, 分散分析を行う. ただし, 観測値ベクトル $X = x_\beta$ は以下のように与えられており, $*$ の部分は欠測値である.

$$
\begin{bmatrix} 13 \\ 21 \\ * \\ 18 \\ 29 \\ 40 \\ 23 \\ 37 \\ 51 \\ 21 \\ * \\ 47 \\ 27 \\ 44 \\ 61 \\ * \\ 54 \\ 75 \\ 29 \\ 47 \\ 65 \\ 36 \\ 59 \\ 82 \\ 43 \\ 71 \\ 99 \end{bmatrix}
$$

(b) 入力データ

観測値ベクトル $X, \mathrm{NA} = 2, \mathrm{N} = 2, \mathrm{M} = 3, \mathrm{IPN} = 0, \mathrm{ISN} = 3, \mathrm{LT}(1) = 3, \mathrm{LT}(2) = 3, \mathrm{LT}(3) = 3, \mathrm{IST}(1,1) = 1, \mathrm{IST}(1,2) = 3, \mathrm{IST}(1,3) = 2, \mathrm{IST}(2,1) = 2, \mathrm{IST}(2,2) = 1, \mathrm{IST}(2,3) = 2, \mathrm{IST}(3,1) = 3, \mathrm{IST}(3,2) = 1, \mathrm{IST}(3,3) = 1$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B4MWRM
!
      IMPLICIT NONE
      REAL(8) V(8,5),WK(80),A(27),X1
      INTEGER NE,IWK(30),IST(3,3),ISN,IPN,LT(7),IPT(15)
      INTEGER IERR,M,M1,I,J,IWK1
!
!     EXAMPLE OF D/R4MWRM
!
      WRITE(6,1000) '*** DFWTFF ***'
      WRITE(6,1000) ' ** INPUT ** '
      READ(5,*) M
      WRITE(6,6020) M
      M1 = 1
      DO 100 I=1,M
         READ(5,*) LT(I)
         WRITE(6,6030) I,LT(I)
         M1 = M1 * LT(I)
 100  CONTINUE
      READ(5,*) IPN
      WRITE(6,6040) IPN
      READ(5,*) ISN
      WRITE(6,6045) ISN
      DO 110 I=1,ISN
         DO 120 J=1,M
            READ(5,*) IST(I,J)
            WRITE(6,6300) I,J,IST(I,J)
 120     CONTINUE
 110  CONTINUE
      DO 130 I=1,M1
         READ(5,*) A(I)
         WRITE(6,5360) I,A(I)
 130  CONTINUE
!
      CALL D4MWRM(A,LT,M,IST,ISN,IPT,IPN,X1,V,IWK,WK,IERR)
      WRITE(6,6050) IERR
      WRITE(6,5350)
      DO 170 I=1,ISN
         IWK1 = IST(I,1)+(IST(I,2)-1)*LT(1)+(IST(I,3)-1)*LT(1)*LT(2)
         WRITE(6,5360) IWK1,A(IWK1)
 170  CONTINUE
      WRITE(6,6060)
      WRITE(6,6070) X1
      WRITE(6,6110)
      WRITE(6,6120)
      NE = 2**M
      WRITE(6,6130) (V(1,J),J=1,2)
      DO 220 I = 2,NE-1
         WRITE(6,6150) I,(V(I,J),J=1,5)
  220 CONTINUE
      WRITE(6,6170) (V(NE,J),J=1,3),V(NE,5)
 1000 FORMAT( /,3X,A16)
 5200 FORMAT( /,/,6X,'MISSED VALUES',/)
 5250 FORMAT( /,8X,'A(',I1,')',/)
 5350 FORMAT( /,/,' ESTIMATED MISSED VALUES',/)
 5360 FORMAT( /,7X,'A(',I2,') = ',D11.5,/)
 6020 FORMAT( /,7X,'M = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'IPN = ',I6)
 6045 FORMAT( /,7X,'ISN = ',I6)
 6030 FORMAT( /,7X,'LT(',I1,') = ',I6)
 6200 FORMAT( /,7X,'IPT(',I1,') = ',I6)
 6300 FORMAT( /,7X,'IST(',I1,',',I1,') = ',I6)
 6050 FORMAT( /,' ** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6060 FORMAT( /,/,' MEAN OVER ALL LEVELS',/,/)
 6090 FORMAT( /,/,' MEAN FOR REPETITION',/,/)
 6070 FORMAT(  '    ',2X,'      ',D11.5,' ')
 6100 FORMAT(  ' Y(',I2,') =  ',D11.5,' ')
 6080 FORMAT(  '  STRICT (',D11.5,')',/)
 6110 FORMAT( /,/,' ANALYSIS-OF-VARIANCE TABLE',/,/)
 6120 FORMAT(  ' ',&
      ' FACTOR  ',4X,'S.S.',9X,'D.F.',9X,'U.V.',9X,'R.V.',9X,'R.C',/,/)
 6130 FORMAT(  ' ',&
      ' TOTAL  ',2(2X,D11.4))
 6150 FORMAT(  ' ',&
      2X,I3,3X,5(2X,D11.4))
 6170 FORMAT(  '  ERROR  ',3(2X,D11.4),15X,D11.4)
      STOP
      END
```

(d) 出力結果

```
*** DFWTFF ***
  ** INPUT **
  M =      3
  LT(1) =      3
  LT(2) =      3
  LT(3) =      3
  IPN =      0
  ISN =      3
  IST(1,1) =      1
  IST(1,2) =      3
  IST(1,3) =      2
  IST(2,1) =      2
  IST(2,2) =      1
  IST(2,3) =      2
  IST(3,1) =      3
  IST(3,2) =      1
  IST(3,3) =      1
  A( 1) = 0.13000D+02

  A( 2) = 0.21000D+02

  A( 3) = 0.10000D+01

  A( 4) = 0.18000D+02

  A( 5) = 0.29000D+02

  A( 6) = 0.40000D+02

  A( 7) = 0.23000D+02

  A( 8) = 0.37000D+02

  A( 9) = 0.51000D+02

  A(10) = 0.21000D+02

  A(11) = 0.10000D+01

  A(12) = 0.47000D+02

  A(13) = 0.27000D+02

  A(14) = 0.44000D+02

  A(15) = 0.61000D+02

  A(16) = 0.10000D+01

  A(17) = 0.54000D+02

  A(18) = 0.75000D+02

  A(19) = 0.29000D+02

  A(20) = 0.47000D+02

  A(21) = 0.65000D+02

  A(22) = 0.36000D+02
```

```
      A(23) = 0.59000D+02

      A(24) = 0.82000D+02

      A(25) = 0.43000D+02

      A(26) = 0.71000D+02

      A(27) = 0.99000D+02

** OUTPUT **
      IERR =      0

ESTIMATED MISSED VALUES

      A(16) = 0.32250D+02

      A(11) = 0.35125D+02

      A( 3) = 0.25250D+02


MEAN OVER ALL LEVELS

         0.43875D+02

ANALYSIS-OF-VARIANCE TABLE

 FACTOR      S.S.         D.F.         U.V.         R.V.         R.C


 TOTAL     0.1185D+05   0.2300D+02
    2      0.5101D+04   0.2000D+01   0.2551D+04   0.3001D+04   0.4302D+00
    3      0.1838D+04   0.2000D+01   0.9190D+03   0.1081D+04   0.1549D+00
    4      0.2311D+03   0.4000D+01   0.5778D+02   0.6798D+02   0.1921D-01
    5      0.4164D+04   0.2000D+01   0.2082D+04   0.2449D+04   0.3511D+00
    6      0.4794D+03   0.4000D+01   0.1198D+03   0.1410D+03   0.4015D-01
    7      0.3631D+02   0.4000D+01   0.9078D+01   0.1068D+02   0.2776D-02
 ERROR     0.4250D+01   0.5000D+01   0.8500D+00                0.1649D-02
```

7.5 累積法

7.5.1 D4MU01, R4MU01 累積法による分散分析

(1) **機 能**

繰り返し数が一定である因子数 3 以下のデータに対して累積法による分散分析を行う. 判定者を r 人とし, 判定は d 段階で行うものとする. 以下は因子数 3 の場合を例に取って説明するが, 使用しない因子の水準数を 1 に設定することで 2 元以下の配置を扱うこともできる.

入力データは

$$x_{ijkl}^{(s)} \quad \left(\begin{array}{lcll} i & = & 1,\cdots,m_a & ;\ \text{因子 A} \\ j & = & 1,\cdots,m_b & ;\ \text{因子 B} \\ k & = & 1,\cdots,m_c & ;\ \text{因子 C} \\ l & = & 1,\cdots,r & ;\ \text{判定者 R} \\ s & = & 1,\cdots,n & ;\ \text{繰り返し数} \end{array}\right)$$

とし, 1 から d までの整数値を取るものとする. m_a, m_b, m_c はそれぞれ因子 A, B, C の水準数で r は判定者数である. なお以下の説明において特に明示しないかぎり i, j, k, l, s などの添字についての $\sum$ 記号による和はそれらの添字の取るうるすべての値にわたって取るものとする.
重み W_m $(m = 1, \cdots, d-1)$ は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} \delta_{ijkl}^{(s)(m)} &= \begin{cases} 1 & (x_{ijkl}^{(s)} \le m \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \\ P_m &= \frac{\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)}}{m_a \cdot m_b \cdot m_c \cdot r \cdot n} \\ W_m &= \frac{1}{P_m(1-P_m)} \end{aligned}$$

修正項 CF は以下のように定義される.

$$CF = \frac{1}{m_a \cdot m_b \cdot m_c \cdot r \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \left\{ W_m \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_s \left(\delta_{ijkl}^{(s)(m)}\right)^2 \right\}$$

また, 分散分析表は以下の要素で構成される.

- 平方和

$$\begin{aligned} S_{A_i}^{(m)} &= \sum_j \sum_k \sum_l \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\ S_{B_j}^{(m)} &= \sum_i \sum_k \sum_l \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\ S_{C_k}^{(m)} &= \sum_i \sum_j \sum_l \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\ S_{R_l}^{(m)} &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\ S_{AB_{ij}}^{(m)} &= \sum_k \sum_l \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\ S_{AC_{ik}}^{(m)} &= \sum_j \sum_l \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{BC_{jk}}^{(m)} &= \sum_i \sum_l \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\
S_{AR_{il}}^{(m)} &= \sum_j \sum_k \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\
S_{BR_{jl}}^{(m)} &= \sum_i \sum_k \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\
S_{CR_{kl}}^{(m)} &= \sum_i \sum_j \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\
S_{ABC_{ijk}}^{(m)} &= \sum_l \sum_s \delta_{ijkl}^{(s)(m)} \\
&\quad (i = 1, \cdots, m_a; j = 1, \cdots, m_b; k = 1, \cdots, m_c) \\
&\quad (l = 1, \cdots, r; m = 1, \cdots, d-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_T &= m_a \cdot m_b \cdot m_c \cdot r \cdot n \cdot (d-1) \\
S_A &= \frac{1}{m_b \cdot m_c \cdot r \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_i (S_{A_i}^{(m)})^2 W_m - CF \\
S_B &= \frac{1}{m_a \cdot m_c \cdot r \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_j (S_{B_j}^{(m)})^2 W_m - CF \\
S_C &= \frac{1}{m_a \cdot m_b \cdot r \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_k (S_{C_k}^{(m)})^2 W_m - CF \\
S_{AB} &= \frac{1}{m_c \cdot r \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_i \sum_j (S_{AB_{ij}}^{(m)})^2 W_m - CF - S_A - S_B \\
S_{BC} &= \frac{1}{m_a \cdot r \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_j \sum_k (S_{AB_{ij}}^{(m)})^2 W_m - CF - S_B - S_C \\
S_{AC} &= \frac{1}{m_b \cdot r \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_i \sum_k (S_{AB_{ij}}^{(m)})^2 W_m - CF - S_A - S_C \\
S_R &= \frac{1}{m_a \cdot m_b \cdot m_c \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_l (S_{R_l}^{(m)})^2 W_m - CF \\
S_{AR} &= \frac{1}{m_b \cdot m_c \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_i \sum_l (S_{AR_{il}}^{(m)})^2 W_m - CF - S_A - S_R \\
S_{BR} &= \frac{1}{m_a \cdot m_c \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_j \sum_l (S_{BR_{jl}}^{(m)})^2 W_m - CF - S_B - S_R \\
S_{CR} &= \frac{1}{m_a \cdot m_b \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_k \sum_l (S_{CR_{kl}}^{(m)})^2 W_m - CF - S_C - S_R \\
S_{ABC} &= \frac{1}{\cdot r \cdot n} \sum_{m=1}^{d-1} \sum_i \sum_j \sum_k (S_{ABC_{ijk}}^{(m)})^2 W_m - CF - S_A - S_B - S_C - S_{AB} \\
&\quad - S_{AC} - S_{BC} \\
S_E &= S_T - S_A - S_B - S_C - S_{AB} - S_{AC} - S_{BC} - S_R - S_{AR} - S_{BR} \\
&\quad - S_{CR} - S_{ABC}
\end{aligned}
$$

- 自由度

$$
\begin{aligned}
\phi_T &= (m_a \cdot m_b \cdot m_c \cdot r \cdot n - 1)(d-1) \\
\phi_A &= (m_a - 1)(d-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_B &= (m_b - 1)(d - 1) \\
\phi_C &= (m_c - 1)(d - 1) \\
\phi_{AB} &= (m_a - 1)(m_b - 1)(d - 1) \\
\phi_{BC} &= (m_b - 1)(m_c - 1)(d - 1) \\
\phi_{AC} &= (m_a - 1)(m_c - 1)(d - 1) \\
\phi_R &= (r - 1)(d - 1) \\
\phi_{AR} &= (m_a - 1)(r - 1)(d - 1) \\
\phi_{BR} &= (m_b - 1)(r - 1)(d - 1) \\
\phi_{CR} &= (m_c - 1)(r - 1)(d - 1) \\
\phi_{ABC} &= (m_a - 1)(m_b - 1)(m_c - 1)(d - 1) \\
\phi_e &= \phi_T - \phi_A - \phi_B - \phi_C - \phi_{AB} - \phi_{BC} - \phi_{AC} - \phi_R - \phi_{AR} - \phi_{BR} \\
&\quad -\phi_{CR} - \phi_{ABC}
\end{aligned}
$$

- 不偏分散

$$
\begin{aligned}
V_A &= \frac{S_A}{\phi_A} \\
V_B &= \frac{S_B}{\phi_B} \\
V_C &= \frac{S_C}{\phi_C} \\
V_{AB} &= \frac{S_{AB}}{\phi_{AB}} \\
V_{BC} &= \frac{S_{BC}}{\phi_{BC}} \\
V_{AC} &= \frac{S_{AC}}{\phi_{AC}} \\
V_R &= \frac{S_R}{\phi_R} \\
V_{AR} &= \frac{S_{AR}}{\phi_{AR}} \\
V_{BR} &= \frac{S_{BR}}{\phi_{BR}} \\
V_{CR} &= \frac{S_{CR}}{\phi_{CR}} \\
V_{ABC} &= \frac{S_{ABC}}{\phi_{ABC}} \\
V_E &= \frac{S_E}{\phi_E}
\end{aligned}
$$

- 分散比

$$
\begin{aligned}
F_A &= \frac{V_A}{V_E} \\
F_B &= \frac{V_B}{V_E} \\
F_C &= \frac{V_C}{V_E} \\
F_{AB} &= \frac{V_{AB}}{V_E} \\
F_{BC} &= \frac{V_{BC}}{V_E}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
F_{AC} &= \frac{V_{AC}}{V_E} \\
F_R &= \frac{V_R}{V_E} \\
F_{AR} &= \frac{V_{AR}}{V_E} \\
F_{BR} &= \frac{V_{BR}}{V_E} \\
F_{CR} &= \frac{V_{CR}}{V_E} \\
F_{ABC} &= \frac{V_{ABC}}{V_E}
\end{aligned}$$

- 寄与率

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \frac{S_A - \phi_A \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_B &= \frac{S_B - \phi_B \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_C &= \frac{S_C - \phi_C \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_{AB} &= \frac{S_{AB} - \phi_{AB} \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_{BC} &= \frac{S_{BC} - \phi_{BC} \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_{AC} &= \frac{S_{AC} - \phi_{AC} \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_R &= \frac{S_R - \phi_R \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_{AR} &= \frac{S_{AR} - \phi_{AR} \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_{BR} &= \frac{S_{BR} - \phi_{BR} \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_{CR} &= \frac{S_{CR} - \phi_{CR} \cdot V_E}{S_T} \\
\rho_{ABC} &= \frac{S_{ABC} - \phi_{ABC} \cdot V_E}{S_T}
\end{aligned}$$

寄与率は $F-$ 検定で 5%または 1%で有意のときだけ計算され, そうでないときには 0.0 に設定される.

密度度数は以下のように定義される.

$$\begin{aligned}
\delta_{ijkl}^{'(s)(m)} &= \begin{cases} 1 & x_{ijkl}^{(m)} = m \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \\
T_{\cdots\cdot} &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{'(s)(m)} \\
T_{i\cdots} &= \sum_j \sum_k \sum_l \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{'(s)(m)} \\
T_{\cdot j\cdot\cdot} &= \sum_i \sum_k \sum_l \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{'(s)(m)} \\
T_{\cdot\cdot k\cdot} &= \sum_i \sum_j \sum_l \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{'(s)(m)} \\
T_{ij\cdot\cdot} &= \sum_k \sum_l \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{'(s)(m)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{\cdot jk\cdot} &= \sum_i \sum_l \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{i\cdot k\cdot} &= \sum_i \sum_k \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{\cdot\cdot\cdot l} &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{i\cdot\cdot l} &= \sum_j \sum_k \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{\cdot j\cdot l} &= \sum_i \sum_k \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{\cdot\cdot kl} &= \sum_i \sum_j \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{ij\cdot l} &= \sum_k \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{\cdot jkl} &= \sum_i \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{i\cdot kl} &= \sum_j \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{ijk\cdot} &= \sum_l \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)} \\
T_{ijkl} &= \sum_{m=1}^{n} \delta_{ijkl}^{\prime(s)(m)}
\end{aligned}
$$

各因子の各水準での予測頻度は以下のように定義される.

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_i^{(m)} &= \frac{S_{A_i}^{(m)}}{\displaystyle\sum_{m=1}^{m_a} \bar{A}_i^{(m)}} \\
\bar{B}_j^{(m)} &= \frac{S_{B_j}^{(m)}}{\displaystyle\sum_{m=1}^{m_b} \bar{B}_j^{(m)}} \\
\bar{C}_k^{(m)} &= \frac{S_{C_k}^{(m)}}{\displaystyle\sum_{m=1}^{m_c} \bar{C}_k^{(m)}} \\
\bar{T}^{(m)} &= \frac{\displaystyle\sum_{ijkls} \delta_{ijkl}^{(s)(m)}}{m_a \cdot m_b \cdot m_c \cdot r \cdot n}
\end{aligned}
$$

累積予測頻度 $\hat{\mu}_{ijk}^{(m)}$ は以下のように定義される.

$$
\Omega_{ijk}^{(m)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\bar{A}_i^{(m)}} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\bar{B}_j^{(m)}} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\bar{C}_k^{(m)}} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{\bar{T}^{(m)}} - 1\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_{ijk}^{(m)} &= \frac{1}{1+\Omega_{ijk}^{(m)}} \qquad (m = 1, \cdots, d-1) \\
\hat{\mu}_{ijk}^{(d)} &= 1
\end{aligned}
$$

予測頻度 $\hat{\alpha}_{ijk}^{(m)}$ は以下のように定義される.

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{ijk}^{(1)} &= \hat{\mu}_{ijk}^{(1)} \\
\hat{\alpha}_{ijk}^{(m)} &= \hat{\mu}_{ijk}^{(m)} - \hat{\mu}_{ijk}^{(m-1)} \qquad (m = 2, \cdots, d)
\end{aligned}
$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D4MU01 (IA, ID, V, IX, NX, NTC, NT, F, TX, OM, MA, AM, AL, MT, P, G, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R4MU01 (IA, ID, V, IX, NX, NTC, NT, F, TX, OM, MA, AM, AL, MT, P, G, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	IA	I	M1	入 力	入力データ $x_{ijkl}^{(s)}$ (注意事項 (a) 参照) ただし $\mathrm{M1} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{5} \mathrm{ID(i)}$
2	ID	I	6	入 力	各因子の水準の数, 判定者の数, 繰り返しの数および段階数 (注意事項 (b) 参照)
3	V	{D/R}	M2	出 力	分散分析表 (分散分析表の格納方法については注意事項 (c) の表 7−7, 7−8 および 7−9 参照) ただし M2 は因子数 1 のときは 28, 因子数 2 のときは 46, 因子数 3 のときは 74 である.
4	IX	I	NX,ID(6)	出 力	密度度数表 (注意事項 (e) 参照.)
5	NX	I	1	入 力	配列 IX および NT の整合寸法
6	NTC	I	1	出 力	密度度数表の大きさ
7	NT	I	NX,4	出 力	密度度数表の番号 (注意事項 (e) 参照)
8	F	{D/R}	3,9,ID(6)	出 力	各水準の各段階における頻度 $\bar{A}_i^{(m)}$, $\bar{B}_j^{(m)}$, $\bar{C}_k^{(m)}$
9	TX	{D/R}	ID(6)	出 力	$\bar{T}^{(m)}$
10	OM	{D/R}	MA,ID(6)	出 力	$\Omega_{ijk}^{(m)}$ (注意事項 (f) 参照)
11	MA	I	1	入 力	配列 OM, AM, AL および MT の整合寸法
12	AM	{D/R}	MA,ID(6)	出 力	予測累積頻度 $\hat{\mu}_{ijk}^{(m)}$ (注意事項 (f) 参照)
13	AL	{D/R}	MA,ID(6)	出 力	予測頻度 $\hat{\alpha}_{ijk}^{(m)}$(注意事項 (f) 参照)
14	MT	I	MA,3	出 力	$\Omega_{ijk}^{(m)}$, $\hat{\mu}_{ijk}^{(m)}$ および $\hat{\alpha}_{ijk}^{(m)}$ の番号 (注意事項 (f) 参照)
15	P	{D/R}	ID(6)	出 力	P_m
16	G	{D/R}	ID(6)	出 力	重み W_m
17	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $2 \le \mathrm{ID}(1) \le 9$

(b) $1 \le \mathrm{ID}(\mathrm{i}) \le 9 \quad (\mathrm{i} = 2, 3)$

(c) $1 \le \mathrm{ID}(4) \le 100$

(d) $1 \le \mathrm{ID}(5) \le 5$

(e) $1 \le \mathrm{ID}(6) \le 11$

(f) $\mathrm{NX} \ge \ (\mathrm{ID}(4)+1) \times \prod_{\mathrm{i}=1,2,3,\mathrm{ID}(\mathrm{i}) \ne 1} (\mathrm{ID}(\mathrm{i})+1)$

(g) $\mathrm{MA} \ge \prod_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathrm{ID}(\mathrm{i})$

(h) 入力データの因子数が 2 の場合には ID(3) = 1 で, 入力データの因子数が 1 の場合には ID(2) = ID(3) = 1 である.

(i) $1 \le \mathrm{IA}(\mathrm{i}) \le \mathrm{ID}(6)$
$(\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \prod_{\mathrm{j}=1}^{5} \mathrm{ID}(\mathrm{j}))$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a)～(g) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (h) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (i) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 入力データ $x_{ijkl}^{(s)}$ は以下のようにして配列 IA に格納される.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IA}(\alpha) &= x_{ijkl}^{(s)} \\
\alpha &= i + (j-1) \times \mathrm{ID}(1) \\
&\quad + (k-1) \times \mathrm{ID}(1) \times \mathrm{ID}(2) \\
&\quad + (l-1) \times \mathrm{ID}(1) \times \mathrm{ID}(2) \times \mathrm{ID}(3) \\
&\quad + (s-1) \times \mathrm{ID}(1) \times \mathrm{ID}(2) \times \mathrm{ID}(3) \times \mathrm{ID}(4)
\end{aligned}
$$

すなわち添字が i, j, k, l の順に変化するように入力データは格納する.

(b) 配列 ID には以下のように入力データ $x_{ijkl}^{(s)}$ に関する情報を格納する.

ID(1) : 因子 A の水準数 m_a
ID(2) : 因子 B の水準数 m_b
ID(3) : 因子 C の水準数 m_c
ID(4) : 判定者数 r
ID(5) : 繰り返し数 n
ID(6) : 段階数 d

因子数 2 の場合には因子 C の水準数を 1 に設定し, 因子数 1 の場合には因子 B と因子 C の水準数を 1 に設定すればよい.

(c) 分散分析表の要素は配列 V に次のように格納する.

- 因子数 1

表 7–7 分散分析表の格納状態 (因子数 1)

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比	寄与率	F 検定の結果
T	V(1)	V(7)				
A	V(2)	V(8)	V(13)	V(18)	V(21)	V(26)
R	V(3)	V(9)	V(14)	V(19)	V(22)	V(27)
AR	V(4)	V(10)	V(15)	V(20)	V(23)	V(28)
E	V(5)	V(11)	V(16)		V(24)	
(E)	V(6)	V(12)	V(17)		V(25)	

- 因子数 2

表 7–8 分散分析表の格納状態 (因子数 2)

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比	寄与率	F 検定の結果
T	V(1)	V(10)				
A	V(2)	V(11)	V(19)	V(27)	V(33)	V(41)
B	V(3)	V(12)	V(20)	V(28)	V(34)	V(42)
R	V(4)	V(13)	V(21)	V(29)	V(35)	V(43)
AB	V(5)	V(14)	V(22)	V(30)	V(36)	V(44)
AR	V(6)	V(15)	V(23)	V(31)	V(37)	V(45)
BR	V(7)	V(16)	V(24)	V(32)	V(38)	V(46)
E	V(8)	V(17)	V(25)		V(39)	
(E)	V(9)	V(18)	V(26)		V(40)	

- 因子数 3

表 7–9 分散分析表の格納状態 (因子数 3)

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比	寄与率	F 検定の結果
T	V(1)	V(13)				
A	V(2)	V(14)	V(27)	V(40)	V(51)	V(64)
B	V(3)	V(15)	V(28)	V(41)	V(52)	V(65)
C	V(4)	V(16)	V(29)	V(42)	V(53)	V(66)
R	V(5)	V(17)	V(30)	V(43)	V(54)	V(67)
AB	V(5)	V(18)	V(31)	V(44)	V(55)	V(68)
AC	V(6)	V(19)	V(32)	V(45)	V(56)	V(69)
AR	V(7)	V(20)	V(33)	V(46)	V(57)	V(70)
BC	V(8)	V(21)	V(34)	V(47)	V(58)	V(71)
BR	V(8)	V(22)	V(35)	V(48)	V(59)	V(72)
CR	V(9)	V(23)	V(36)	V(49)	V(60)	V(73)
ABC	V(10)	V(24)	V(37)	V(50)	V(61)	V(74)
E	V(11)	V(25)	V(38)		V(62)	
(E)	V(12)	V(26)	V(39)		V(63)	

(d) 配列 V の F 検定の結果の項の値は, 検定結果が 1%有為であれば 1.0 が, 5%有為であれば 5.0 が, それ以外の場合には 0.0 が設定される.

(e) 密度度数表の配列 IX への格納のされかたを因子数 3 の場合を例に取って説明する．まず密度度数 $T_{ijkl}^{(m)}$ の添字 i, j, k, l に対応して次のような添字を用意する．

$$\begin{aligned} i' &= 0,1,2,\cdots,m_a \\ j' &= 0,1,2,\cdots,m_b \\ k' &= 0,1,2,\cdots,m_c \\ l' &= 0,1,2,\cdots,r \end{aligned}$$

そして $D_{i'j'k'l'}^{(m)}$ を以下のように定義する．
i', j', k', l' がいずれも 0 でないとき:

$$D_{i'j'k'l'}^{(m)} = T_{i'j'k'l'}^{(m)}$$

i', j', k', l' のいずれかが 0 のとき:
$D_{i'j'k'l'}$ は 0 である添字について $T_{i'j'k'l'}^{(m)}$ を足しあげた量であると定義する．たとえば $j'=0$ で i', k', l' が 0 でないとすると

$$D_{i'j'k'l'}^{(m)} = \sum_j T_{i'jk'l'}^{(m)} = T_{i'\cdot k'l'}^{(m)}$$

あるいは $i'=k'=0$ で j', l' が 0 でないとすると

$$D_{i'j'k'l'}^{(m)} = \sum_i \sum_k T_{ij'kl'}^{(m)} = T_{\cdot j'\cdot l'}^{(m)}$$

そして密度度数表とその番号は次のように配列 IX および NT に格納される．

$$\mathrm{IX}(\beta, m) = D_{i'j'k'l'}^{(m)}$$

$$\mathrm{NT}(\beta, 1) = i'$$

$$\mathrm{NT}(\beta, 2) = j'$$

$$\mathrm{NT}(\beta, 3) = k'$$

$$\mathrm{NT}(\beta, 4) = l'$$

$$\beta = l' + k' \times \mathrm{ID}(4) + j' \times \mathrm{ID}(3) \times \mathrm{ID}(4) + i' \times \mathrm{ID}(2) \times \mathrm{ID}(3) \times \mathrm{ID}(4)$$

すなわち配列の添字 β の変化にしたがって，$T_{i'j'k'l'}$ の添字が l', k', j', i' の順で変化する．ただし因子数が 2 のときには $\mathrm{NT}(\beta,3)$ の値は 0 に設定され，因子数が 1 のときには $\mathrm{NT}(\beta,2)$ と $\mathrm{NT}(\beta,3)$ の値は 0 に設定される．

(f) $\Omega_{ijk}^{(m)}$, $\hat{\mu}_{ijk}^{(m)}$, $\hat{\alpha}_{ijk}^{(m)}$ およびこれらに対する番号は以下のようにして配列 OM, AM, AL および MT に格納される．

$$\mathrm{OM}(\beta, m) = \Omega_{ijk}^{(m)}$$

$$\mathrm{AM}(\beta, m) = \hat{\mu}_{ijk}^{(m)}$$

$$\mathrm{AL}(\beta, m) = \hat{\alpha}_{ijk}^{(m)}$$

$$\mathrm{MT}(\beta, 1) = i$$

$$\mathrm{MT}(\beta, 2) = j$$

$$\mathrm{MT}(\beta, 3) = k$$

$$\beta = k + j \times \mathrm{ID}(3) + i \times \mathrm{ID}(2) \times \mathrm{ID}(3)$$

すなわち配列の添字 β の変化にしたがって, $\Omega_{ijk}^{(m)}$, $\hat{\mu}_{ijk}^{(m)}$, $\hat{\alpha}_{ijk}^{(m)}$ の添字が k, j, i の順で変化する．ただし因子数が 2 のときには MT(β, 3) の値は 0 に設定され, 因子数が 1 のときには MT(β, 2) と MT(β, 3) の値は 0 に設定される.

(7) 使用例

(a) 問 題

因子数 2 の観測データ

$$\begin{aligned} X \;=\; \{&2,3,3,1,2,3,2,3,2,1,2,2,2,3,2,1,1,3,2,3,\\ &3,1,3,3,2,3,2,1,3,2,2,3,3,1,2,3,3,2,3,2,\\ &3,2,3,2,3,1,2,1,3,1,3,1,2,3,1,2,3,1,3,3,\\ &2,3,3,2,3,2,1,3,2,2,2,3\} \end{aligned}$$

に対して累積法による分散分析を行う．ここで因子 A の水準数は 3, 因子 B の水準数は 2, 判定者は 6 人, 繰り返し数は 2 で判定は 3 段階で行うものとする.

(b) 入力データ

観測データ X, NX=84, MA=6,

ID (1) =3, ID (2) =2, ID (3) =1, ID (4) =6, ID (5) =2, ID (6) =3

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B4MU01
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NX = 84, MA = 6 )
      DIMENSION IA(72),ID(6),V(46),IX(NX,3),NT(NX,4),F(3,9,3),TX(3)
      DIMENSION OM(MA,3),AM(MA,3),AL(MA,3),MT(MA,3),P(3),G(3)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =  0
      READ(5,*) (IA(I),I=1,72)
      READ(5,*) (ID(I),I=1,6)
      WRITE(6,6010) (IA(I),I=1,72)
      WRITE(6,6020) (ID(I),I=1,6)
      CALL D4MU01(IA,ID,V,IX,NX,NTC,NT,F,TX,OM,MA,AM,AL,MT,P,G,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040)
      JD = IA(1)
      DO 100 I=2,72
         JD = MAX(JD,IA(I))
  100 CONTINUE
      DO 110 I=1,JD-1
         WRITE(6,6050) P(I),G(I)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6060)
      DO 120 I=1,9
         IF(I.EQ.1) THEN
            WRITE(6,6070) I,V(I),V(9+I)
         ELSE IF(I.LE.7) THEN
            WRITE(6,6070)&
            I,V(I),V(9+I),V(17+I),V(25+I),V(31+I),V(39+I)
         ELSE
            WRITE(6,6080)&
            I,V(I),V(9+I),V(17+I),V(31+I)
         ENDIF
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6090)
      DO 130 I=1,NTC
         WRITE(6,6100) (NT(I,J),J=1,4),(IX(I,J),J=1,JD)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6110) 'A'
      DO 140 I=1,ID(1)
         WRITE(6,6120) (F(1,I,J),J=1,JD)
  140 CONTINUE
      WRITE(6,6110) 'B'
      DO 150 I=1,ID(2)
         WRITE(6,6120) (F(2,I,J),J=1,JD)
  150 CONTINUE
      WRITE(6,6110) 'TX'
      WRITE(6,6120) (TX(J),J=1,JD-1)
      WRITE(6,6130) 'OMEGA'
      DO 160 I=1,6
         WRITE(6,6140) (MT(I,J),J=1,3),(OM(I,J),J=1,JD-1)
  160 CONTINUE
      WRITE(6,6130) 'MU'
      DO 170 I=1,6
```

```
         WRITE(6,6140) (MT(I,J),J=1,3),(AM(I,J),J=1,JD-1)
  170 CONTINUE
      WRITE(6,6130) 'ALPHA'
      DO 180 I=1,6
         WRITE(6,6140) (MT(I,J),J=1,3),(AL(I,J),J=1,JD-1)
  180 CONTINUE
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D4MU01 ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'OBSERVATIONS',/,/,&
                   8(6X,10I6,/))
 6020 FORMAT( /,7X,'NUMBER OF A          = ',I6,/,&
              /,7X,'NUMBER OF B          = ',I6,/,&
              /,7X,'NUMBER OF C          = ',I6,/,&
              /,7X,'NUMBER OF PERSONS    = ',I6,/,&
              /,7X,'NUMBER OF ITERATIONS = ',I6,/,&
              /,7X,'NUMBER OF STEPS      = ',I6)
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,17X,'P',9X,'WEIGHT',/,&
               7X,27('-'))
 6050 FORMAT(  7X,5(2X,F11.4))
 6060 FORMAT( /,7X,'ANALYSIS OF VARIANCE TABLE',/,&
              /,10X,'FACTOR',&
                   4X,'S.S.',7X,'D.F.',6X,'M.S.',8X,'V.R.',8X,'C.R.',&
                   6X,'R.F.',/,&
               9X,71('-'))
 6070 FORMAT(  10X,I2,2X,2(F11.4),3(1X,D11.4),1X,F6.2)
 6080 FORMAT(  10X,I2,2X,2(F11.4),1X,D11.4,13X,D11.4,1X,F6.2)
 6090 FORMAT( /,7X,'DENSITY FREQUENCIES',/,&
              /,10X,'ABCR',/,&
               9X,30('-'))
 6100 FORMAT(  10X,4I1,3(2X,I6))
 6110 FORMAT( /,7X,'FREQUENCIES AT N STEP IN ',A,' LEVEL',/)
 6120 FORMAT(  9X,5(2X,D15.8))
 6130 FORMAT( /,7X,A,/,&
              /,10X,'ABC',/,&
               9X,39('-'))
 6140 FORMAT(  10X,3I1,2(2X,D15.8))
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D4MU01 ***

   ** INPUT **

       OBSERVATIONS

            2     3     3     1     2     3     2     3     2     1
            2     2     2     3     2     1     1     3     2     3
            3     1     3     3     2     3     2     1     3     2
            2     3     3     1     2     3     3     2     3     2
            3     2     3     2     3     1     2     1     3     1
            3     1     2     3     1     2     3     1     3     3
            2     3     3     2     3     2     1     3     2     2
            2     3

       NUMBER OF A          =      3

       NUMBER OF B          =      2

       NUMBER OF C          =      1

       NUMBER OF PERSONS    =      6

       NUMBER OF ITERATIONS =      2

       NUMBER OF STEPS      =      3

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

                 P         WEIGHT
       ---------------------------
              0.1944       6.3842
              0.5694       4.0787

       ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

          FACTOR    S.S.       D.F.      M.S.        V.R.        C.R.      R.F.
         -----------------------------------------------------------------------
           1     144.0000   142.0000
           2      30.1867     4.0000  0.7547D+01  0.1083D+02  0.1892D+00   1.00
           3       8.4506     2.0000  0.4225D+01  0.6062D+01  0.4845D-01   1.00
           4       6.9038    10.0000  0.6904D+00  0.9905D+00  0.0000D+00   0.00
           5       8.0788     4.0000  0.2020D+01  0.2898D+01  0.3563D-01   5.00
           6      20.4133    20.0000  0.1021D+01  0.1464D+01  0.0000D+00   0.00
           7       5.8398    10.0000  0.5840D+00  0.8378D+00  0.0000D+00   0.00
           8      64.1269    92.0000  0.6970D+00              0.0000D+00
           9      97.2838   132.0000  0.7370D+00              0.7268D+00

       DENSITY FREQUENCIES

          ABCR
         ------------------------------
          0000       14       27       31
          1000       11       10        3
```

2000	2	9	13
3000	1	8	15
0100	3	14	19
0200	11	13	12
0001	1	5	6
0002	3	6	3
0003	4	3	5
0004	3	2	7
0005	1	6	5
0006	2	5	5
1100	2	7	3
1200	9	3	0
2100	1	3	8
2200	1	6	5
3100	0	4	8
3200	1	4	7
1001	1	2	1
1002	2	1	1
1003	2	1	1
1004	3	1	0
1005	1	3	0
1006	2	2	0
2001	0	2	2
2002	0	3	1
2003	2	1	1
2004	0	1	3
2005	0	0	4
2006	0	2	2
3001	0	1	3
3002	1	2	1
3003	0	1	3
3004	0	0	4
3005	0	3	1
3006	0	1	3
0101	0	2	4
0102	0	3	3
0103	1	2	3
0104	1	2	3
0105	0	3	3
0106	1	2	3
0201	1	3	2
0202	3	3	0
0203	3	1	2
0204	2	0	4
0205	1	3	2
0206	1	3	2
1101	0	1	1
1102	0	1	1
1103	0	1	1
1104	1	1	0
1105	0	2	0
1106	1	1	0
1201	1	1	0
1202	2	0	0
1203	2	0	0
1204	2	0	0
1205	1	1	0
1206	1	1	0
2101	0	1	1
2102	0	1	1
2103	1	0	1
2104	0	1	1
2105	0	0	2
2106	0	0	2
2201	0	1	1
2202	0	2	0
2203	1	1	0
2204	0	0	2
2205	0	0	2
2206	0	2	0
3101	0	0	2
3102	0	1	1
3103	0	1	1
3104	0	0	2
3105	0	1	1
3106	0	1	1
3201	0	1	1
3202	1	1	0
3203	0	0	2
3204	0	0	2
3205	0	2	0
3206	0	0	2

```
FREQUENCIES AT N STEP IN A LEVEL

     0.45833333D+00   0.41666667D+00   0.12500000D+00
     0.83333333D-01   0.37500000D+00   0.54166667D+00
     0.41666667D-01   0.33333333D+00   0.62500000D+00

FREQUENCIES AT N STEP IN B LEVEL

     0.83333333D-01   0.38888889D+00   0.52777778D+00
     0.30555556D+00   0.36111111D+00   0.33333333D+00

FREQUENCIES AT N STEP IN TX LEVEL

     0.19444444D+00   0.56944444D+00

OMEGA

   ABC
```

```
    ----------------------------------------
     110    0.31379310D+01    0.21116834D+00
     120    0.64833286D+00    0.94470046D-01
     210    0.29206897D+02    0.17469381D+01
     220    0.60344828D+01    0.78152493D+00
     310    0.61068966D+02    0.24636306D+01
     320    0.12617555D+02    0.11021505D+01

MU

     ABC
    ----------------------------------------
     110    0.24166667D+00    0.82564906D+00
     120    0.60667358D+00    0.91368421D+00
     210    0.33105023D-01    0.36404170D+00
     220    0.14215686D+00    0.56131687D+00
     310    0.16111111D-01    0.28871439D+00
     320    0.73434622D-01    0.47570332D+00

ALPHA

     ABC
    ----------------------------------------
     110    0.24166667D+00    0.58398239D+00
     120    0.60667358D+00    0.30701063D+00
     210    0.33105023D-01    0.33093668D+00
     220    0.14215686D+00    0.41916001D+00
     310    0.16111111D-01    0.27260328D+00
     320    0.73434622D-01    0.40226870D+00
```

7.6 乱塊法

7.6.1 D4RB01, R4RB01
乱塊法による分散分析

(1) **機 能**

乱塊法により分散分析を行う.

なお, n 個のブロック, t 回の試行によって得られた観測値 $\{x_{ij}\}$, $(i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, t)$ に対する分散分析の結果は, それぞれ次式で定義される.

総和:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} x_{ij}$$

ブロックごとの総和:

$$T_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{t} x_{ij}$$

試行ごとの総和:

$$T_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

変動:

- 全変動
$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} \left(x_{ij} - \frac{T}{n \cdot t} \right)^2$$
- 平均変動
$$S_c = \frac{T^2}{n \cdot t}$$
- ブロック間変動
$$S_p = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \left(T_{i\cdot} - \frac{T}{n} \right)^2$$
- 試行間変動
$$S_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{t} \left(T_{\cdot j} - \frac{T}{t} \right)^2$$
- 誤差変動
$$S_e = S - (S_p + S_r)$$

自由度:

$$\phi = n \cdot t - 1, \quad \phi_c = 1, \quad \phi_p = n - 1, \quad \phi_r = t - 1$$

$$\phi_e = (n-1)(t-1)$$

不偏分散:

$$V_p = \frac{S_p}{\phi_p}, \quad V_r = \frac{S_r}{\phi_r}, \quad V_e = \frac{S_e}{\phi_e}$$

分散比:

$$F_p = \frac{V_p}{V_e}, \quad F_r = \frac{V_r}{V_e}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D4RB01 (A, NA, NB, NT, V, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R4RB01 (A, NA, NB, NT, V, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	NA,NT	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ij})
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	NB	I	1	入 力	ブロックの個数 n
4	NT	I	1	入 力	試行の回数 t
5	V	{D/R}	15	出 力	分散分析の結果 (注意事項 (a) の表 7−10 参照)
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) NA≥NB≥1

(b) NT≥1

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	NB=1 または NT=1 であった.	不偏分散と分散比に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (a), (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 分散分析の結果は配列 V に次のように格納される.

表 7–10　分散分析表

要 因	変 動	自由度	不偏分散	分散比
全　体	V (1)	V (6)		
平　均	V (2)	V (7)		
ブロック間	V (3)	V (8)	V (11)	V (14)
試 行 間	V (4)	V (9)	V (12)	V (15)
誤　差	V (5)	V (10)	V (13)	

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値が以下のような行列 X で与えられたとき, 乱塊法による分散分析を行う.

$$X = \begin{bmatrix} 42 & 28 & 19 & 7 & 4 \\ 15 & 14 & -19 & -4 & -6 \\ -8 & 30 & -17 & 9 & -31 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

観測値行列 X, NA=100, NB=3, NT=5

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B4RB01
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, NT = 5 )
      DIMENSION A(NA,NT),V(15)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      READ(5,*) NB
      DO 100 I=1,NB
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,NT)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) NB,NT
      DO 110 I=1,NB
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,NT)
  110 CONTINUE
      CALL D4RB01(A,NA,NB,NT,V,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040)
      WRITE(6,6050) 'TOTAL    ',V(1),V(6)
      WRITE(6,6050) 'MEAN     ',V(2),V(7)
      WRITE(6,6050) 'BLOCK    ',V(3),V(8),V(11),V(14)
      WRITE(6,6050) 'TREATMENT',V(4),V(9),V(12),V(15)
      WRITE(6,6050) 'ERROR    ',V(5),V(10),V(13)
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D4RB01 ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'NB = ',I6,5X,'NT = ',I6,/,&
             /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'ANALYSIS OF VARIANCE TABLE',/,&
             /,10X,'FACTOR',&
                 10X,'S.S.',9X,'D.F.',8X,'M.S.',13X,'V.R.',/,&
              9X,69('-'))
 6050 FORMAT(  10X,A,2(1X,F11.2),2(2X,D15.8))
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D4RB01 ***

  ** INPUT **

      NB =      3     NT =      5

      OBSERVATION MATRIX

              42.00         28.00         19.00         7.00          4.00
```

```
          15.00        14.00        -19.00         -4.00         -6.00
          -8.00        30.00        -17.00          9.00        -31.00

** OUTPUT **

    IERR =      0

    ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

       FACTOR          S.S.          D.F.         M.S.              V.R.
      ---------------------------------------------------------------------
       TOTAL         5643.73        14.00
       MEAN           459.27         1.00
       BLOCK         1598.53         2.00   0.79926667D+03   0.43533043D+01
       TREATMENT     2576.40         4.00   0.64410000D+03   0.35081699D+01
       ERROR         1468.80         8.00   0.18360000D+03
```

7.7 グレコ・ラテン方格法

7.7.1 D4GL01, R4GL01 グレコ・ラテン方格法による分散分析

(1) **機 能**

グレコ・ラテン方格法により分散分析を行う.

なお, 観測値 $\{x_{ij(kl)}\}$ (i :因子 P の水準; j :因子 Q の水準; k, l :グレコ・ラテン方格を構成する) に対応する直交している 2 つのラテン方格 MT, MG に対する分散分析の結果は, それぞれ次式で定義される.

総和, 行和, 列和:

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij(kl)}, \quad T_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij(kl)}, \quad T_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij(kl)}$$

$$T_k = \sum_{k \in MT} x_{ij(kl)}, \quad T_l = \sum_{l \in MG} x_{ij(kl)}$$

変動:

- 全変動
$$S_s = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij(kl)} - \frac{T}{n^2}\right)^2$$
- 行間変動
$$S_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(T_{i\cdot} - \frac{T}{n}\right)^2$$
- 列間変動
$$S_q = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(T_{\cdot j} - \frac{T}{n}\right)^2$$
- R 間変動
$$S_r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(T_k - \frac{T}{n}\right)^2$$
- A 間変動
$$S_a = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(T_l - \frac{T}{n}\right)^2$$
- 誤差変動
$$S_e = S_s - (S_p + S_q + S_r + S_a)$$

自由度:

$$\phi_s = n^2 - 1, \quad \phi_p = \phi_q = \phi_r = \phi_a = n - 1, \quad \phi_e = (n-1)(n-3)$$

不偏分散:

$$V_p = \frac{S_p}{\phi_p}, \quad V_q = \frac{S_q}{\phi_q}, \quad V_r = \frac{S_r}{\phi_r}, \quad V_a = \frac{S_a}{\phi_a}, \quad V_e = \frac{S_e}{\phi_e}$$

分散比:

$$F_p = \frac{V_p}{V_e}, \quad F_q = \frac{V_q}{V_e}, \quad F_r = \frac{V_r}{V_e}, \quad F_a = \frac{V_a}{V_e}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D4GL01 (A, NA, N, MT, MG, V, IWK, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R4GL01 (A, NA, N, MT, MG, V, IWK, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	{D / R}	NA,N	入 力	観測値を格納した行列 $(x_{ij(kl)})$
2	NA	I	1	入 力	配列 A, MT および MG の整合寸法
3	N	I	1	入 力	試行回数 n
4	MT	I	NA,N	入 力	ラテン方格 MT
5	MG	I	NA,N	入 力	ラテン方格 MG
6	V	{D / R}	19	出 力	分散分析の結果 (注意事項 (a) の表 7–11 参照)
7	IWK	I	N×N	ワーク	作業領域
8	WK	{D / R}	N	ワーク	作業領域
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) NA≥N≥3

(b) MT および MG はラテン方格である

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	N=3 であった.	不偏分散と分散比に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 分散分析の結果は配列 V に次のように格納される.

表 7–11　分散分析表

要 因	変　動	自由度	不偏分散	分散比
P (行)	V (1)	V (6)	V (11)	V (16)
Q (列)	V (2)	V (7)	V (12)	V (17)
R	V (3)	V (8)	V (13)	V (18)
A	V (4)	V (9)	V (14)	V (19)
誤　差	V (5)	V (10)	V (15)	

(b) 因子のわりつけは, 因子 P, Q を 2 次元配置のようにわりつけ, 因子 R, A は各々の水準が使用するラテン方格 MT, MG に対応するようにわりつける.

表 7–12　グレコ・ラテン方格法の実験配置

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
P_1	R_2A_1	R_4A_3	R_1A_2	R_3A_4
P_2	R_4A_2	R_2A_4	R_3A_1	R_1A_3
P_3	R_1A_4	R_3A_2	R_2A_3	R_4A_1
P_4	R_3A_3	R_1A_1	R_4A_4	R_2A_2

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値 X と 2 つのラテン方格 MT, MG が以下のように与えられているとき, グレコ・ラテン方格法により分散分析を行う.

$$X = \begin{bmatrix} 8.6 & 11.0 & 17.2 & 18.2 \\ 13.5 & 13.4 & 20.3 & 19.0 \\ 14.8 & 20.5 & 16.9 & 18.7 \\ 18.7 & 17.2 & 20.7 & 22.8 \end{bmatrix}$$

$$MT = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MG = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

観測値行列 X, ラテン方格 MT, MG, NA=100, N=4

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B4GL01
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 100, N = 4 )
```

```
      DIMENSION A(NA,N),MT(NA,N),MG(NA,N),V(19)
      DIMENSION IWK(N*N),WK(N)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR =   0
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) (MT(I,J),J=1,N)
  100 CONTINUE
      DO 110 I=1,N
         READ(5,*) (MG(I,J),J=1,N)
  110 CONTINUE
      DO 120 I=1,N
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,N)
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6010) N
      WRITE(6,6020)
      DO 130 I=1,N
         WRITE(6,6030) (MT(I,J),J=1,N)
  130 CONTINUE
      WRITE(6,6040)
      DO 140 I=1,N
         WRITE(6,6030) (MG(I,J),J=1,N)
  140 CONTINUE
      WRITE(6,6050)
      DO 150 I=1,N
         WRITE(6,6060) (A(I,J),J=1,N)
  150 CONTINUE
      CALL D4GL01(A,NA,N,MT,MG,V,IWK,WK,IERR)
      WRITE(6,6070) IERR
      WRITE(6,6080)
      WRITE(6,6090) 'ROW         ',V(1),V(6),V(11),V(16)
      WRITE(6,6090) 'COLUMN      ',V(2),V(7),V(12),V(17)
      WRITE(6,6090) 'TREATMENTS R',V(3),V(8),V(13),V(18)
      WRITE(6,6090) 'TREATMENTS A',V(4),V(9),V(14),V(19)
      WRITE(6,6090) 'ERROR       ',V(5),V(10),V(15)
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D4GL01 ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'N = ',I6)
 6020 FORMAT( /,7X,'LATIN SQUARE MT',/)
 6030 FORMAT(  7X,5(2X,I6))
 6040 FORMAT( /,7X,'LATIN SQUARE MG',/)
 6050 FORMAT( /,7X,'OBSERVATION MATRIX',/)
 6060 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6070 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6080 FORMAT( /,7X,'ANALYSIS OF VARIANCE TABLE',/,&
              /,10X,'FACTOR',&
                   12X,'S.S.',8X,'D.F.',8X,'M.S.',13X,'V.R.',/,&
               9X,70('-'))
 6090 FORMAT(  10X,A,2(F11.2),2(2X,D15.8))
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D4GL01 ***

   ** INPUT **

       N =      4

       LATIN SQUARE MT

              1       2       3       4
              2       1       4       3
              3       4       1       2
              4       3       2       1

       LATIN SQUARE MG

              1       3       4       2
              2       4       3       1
              3       1       2       4
              4       2       1       3

       OBSERVATION MATRIX

                8.60        11.00        17.20        18.20
               13.50        13.40        20.30        19.00
               14.80        20.50        16.90        18.70
               18.70        17.20        20.70        22.80

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

          FACTOR            S.S.        D.F.        M.S.             V.R.
         ----------------------------------------------------------------------
          ROW              77.64        3.00  0.25878958D+02  0.58874354D+01
          COLUMN           88.35        3.00  0.29450625D+02  0.66999858D+01
          TREATMENTS R     37.64        3.00  0.12547292D+02  0.28544955D+01
          TREATMENTS A      1.56        3.00  0.51895833D+00  0.11806247D+00
          ERROR            13.19        3.00  0.43956250D+01
```

7.8 釣合型不完備ブロック計画

7.8.1 D4BI01, R4BI01
釣合型不完備ブロック計画による分散分析

(1) **機 能**

釣合型不完備ブロック計画のデータに対して分散分析を行う.

不完備ブロック計画は, 比較したい試行 (処理) の一揃いがブロックに入っていないで, 不揃いである場合をさす. 特に, 各試行の反復数が等しく, なおかつ任意の 2 つの試行が同一ブロックに現われる回数が等しいとき, 釣合型不完備ブロック計画の配置であるという.

以下に例としてブロック数が 4, 試行数が 4, ブロック当たりの試行数が 3 の場合を示す.

ブロック	試行				$T_{i\cdot}$
	1	2	3	4	
A_1	x_{11}		x_{13}	x_{14}	$T_{1\cdot}$
A_2		x_{22}	x_{23}	x_{24}	$T_{2\cdot}$
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}		$T_{3\cdot}$
A_4	x_{41}	x_{42}		x_{44}	$T_{4\cdot}$
$T_{\cdot j}$	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	$T_{\cdot 3}$	$T_{\cdot 4}$	T

この例の場合, 任意の 2 つの試行が同時に同一ブロックに現われる回数は, 2 回である.

なお, ブロック数が n, 試行数が t, ブロック当たりの試行数が m である釣合型不完備ブロック計画の配置のデータ $\{x_{ij}\}$, $(i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,t)$ が与えられたときの分散分析の結果は以下のように定義される.

総和:

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} n_{ij}x_{ij}$$

ブロックごとの総和:

$$T_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{t} n_{ij}x_{ij}$$

試行ごとの総和:

$$T_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} n_{ij}x_{ij}$$

ブロック調整済み試行ごとの総和:

$$\begin{aligned} Q_{\cdot j} &= m \cdot T_{\cdot j} - \sum_{i=1}^{n}(n_{ij} \cdot T_{i\cdot}) \\ & \quad (n_{ij} : \text{生起行列 } N \text{ の } (i,j) \text{ 要素}) \end{aligned}$$

変動:

- 総変動

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} n_{ij}x_{ij}^2 - CF$$

ここで

$$CF = \frac{T^2}{n \cdot m} = \frac{1}{n \cdot m} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} n_{ij} x_{ij} \right)^2$$

- ブロック間変動

$$S_B = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} T_{i\cdot}^2 - CF$$

- 試行間変動 (ブロック調整済み)

$$S_T = \frac{t-1}{n \cdot m^2 \cdot (m-1)} \sum_{j=1}^{t} Q_{\cdot j}^2$$

- 誤差変動

$$S_E = S - (S_B + S_T)$$

自由度:

$$\begin{aligned} \phi &= n \cdot m - 1 \\ \phi_B &= n - 1 \\ \phi_T &= t - 1 \\ \phi_E &= n \cdot m - n - t + 1 \end{aligned}$$

不偏分散:

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{S_T}{\phi_T} \\ V_B &= \frac{S_B}{\phi_B} \\ V_E &= \frac{S_E}{\phi_E} \end{aligned}$$

分散比:

$$F_T = \frac{V_T}{V_B}$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D4BI01 (A, NA, NB, NT, M, N, V, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R4BI01 (A, NA, NB, NT, M, N, V, W1, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}D \\ R\end{array}\right\}$	NA,NT	入 力	観測値を格納した行列 (x_{ij})
2	NA	I	1	入 力	配列 A, N の整合寸法
3	NB	I	1	入 力	ブロックの総数 n
4	NT	I	1	入 力	試行の回数 t
5	M	I	1	入 力	1 ブロックあたりの試行の回数 m
6	N	$\left\{\begin{array}{c}D \\ R\end{array}\right\}$	NA,NT	入 力	生起行列 (n_{ij}). 第 i 番目のブロックで試行 j が行われているとき $n_{ij}=1$ とする. それ以外の場合は $n_{ij}=0$ とする.
7	V	$\left\{\begin{array}{c}D \\ R\end{array}\right\}$	12	出 力	分散分析の結果 (分散分析の結果の格納方法については注意事項(a)の表 7–13 参照.)
8	W1	$\left\{\begin{array}{c}D \\ R\end{array}\right\}$	NB	ワーク	作業領域
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) NA $\geq$ NB ≥ 2

(b) NT $\geq$ M ≥ 2

(c) $\dfrac{\mathrm{NB}\cdot\mathrm{M}}{\mathrm{NT}}$ は整数となる.

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) または (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) 注意事項

(a) 分散分析の結果は配列 V に次のように格納される.

表 7–13　分散分析表

要素	変 動	自由度	不偏分散	分散比
各観測値の平方の和	V(1)	V(5)		
ブロック間	V(2)	V(6)	V(9)	V(12)
試行間 (ブロック調整済み)	V(3)	V(7)	V(10)	
誤差	V(4)	V(8)	V(11)	

(7) **使用例**

(a) 問 題

以下のような行列 A で与えられる釣合型不完備計画の配置のデータに対して, 分散分析を行う. $*$ の部分は対応する観測値が存在しないことを表す.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & * & 4 & 0 \\ * & 32 & 13 & 23 \\ 20 & 14 & 31 & * \\ 7 & 3 & * & 11 \end{bmatrix}$$

生起行列 N は以下のように与えられる.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) 入力データ

釣合型不完備計画の配置のデータ A, 生起行列 N, NA=4, NB=4, NT=4, M=3

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B4BI01
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 5,NT = 4)
      DIMENSION A(NA,NT),N(NA,NT),W1(NA),V(12)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      READ(5,*) NB,M
      DO 100 I = 1,NB
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,NT)
  100 CONTINUE
      DO 110 I = 1,NB
         READ(5,*) (N(I,J),J=1,NT)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) NA,NB,NT,M
      WRITE(6,6020)
      DO 120 I=1,NB
         WRITE(6,6030) (A(I,J),J=1,NT)
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6040)
      DO 130 I=1,NB
         WRITE(6,6050) (N(I,J),J=1,NT)
  130 CONTINUE
      CALL D4BI01(A,NA,NB,NT,M,N,V,W1,IERR)
      WRITE(6,6060) IERR
      WRITE(6,6070)
      WRITE(6,6080) 'TOTAL',V(1),V(5)
      WRITE(6,6090) ' SB  ',V(2),V(6),V(9),V(12)
      WRITE(6,6100) ' ST  ',V(3),V(7),V(10)
      WRITE(6,6100) 'ERROR',V(4),V(8),V(11)
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D4BI01 ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'NA = ',I6,5X,'NB = ',I6,/,&
             /,7X,'NT = ',I6,5X,'M  = ',I6)
 6020 FORMAT( /,3X,'A',/)
 6030 FORMAT(  7X,4(2X,F11.2),/)
 6040 FORMAT( /,3X,'N',/)
 6050 FORMAT(  7X,4(2X,I6,3X),/)
 6060 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6070 FORMAT( /,7X,'ANALYSIS OF VARIANCE TABLE',/,&
             /,10X,'FACTOR',&
                  8X,'S.S.',9X,'D.F.',6X,'M.S.',8X,'V.R.',/,&
              9X,69('-'))
 6080 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.4))
 6090 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.4),2(1X,D11.4))
 6100 FORMAT(  10X,A,2(2X,F11.4),1X,D11.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D4BI01 ***

  ** INPUT **
```

```
    NA =      5     NB =      4
    NT =      4     M  =      3
A
           2.00         0.00         4.00         0.00
           0.00        32.00        13.00        23.00
          20.00        14.00        31.00         0.00
           7.00         3.00         0.00        11.00

N
         1          0          1          1
         0          1          1          1
         1          1          1          0
         1          1          0          1

** OUTPUT **
    IERR =      0
    ANALYSIS OF VARIANCE TABLE
       FACTOR        S.S.          D.F.       M.S.        V.R.
      ---------------------------------------------------------------------
       TOTAL    1344.6667      11.0000
        SB       975.3333       3.0000  0.3251D+03  0.6323D-02
        ST         6.1667       3.0000  0.2056D+01
       ERROR     363.1667       5.0000  0.7263D+02
```

第 8 章　ノンパラメトリック検定

8.1　概 要

伝統的な統計的検定では, 母集団分布として正規分布を仮定する場合が多い. また, 測定値は連続量であることを前提としている. このように, 母集団分布を特定し, 測定値として連続量を想定する検定を**パラメトリック検定**と呼ぶ. これに対して, 母集団分布を特定しなかったり, 測定値が完全な量でなく順序や度数として表されているデータを対象とする検定を**ノンパラメトリック検定**と呼ぶ.

本ライブラリでは, ノンパラメトリック検定を行うための以下の機能を用意している.

- 適合度の検定
- χ^2 検定 (2×2 分割表)
- χ^2 検定 ($m \times n$ 分割表)
- 中央値検定
- 符号検定
- ウィルコクソン検定
- マン・ホイットニの U 検定
- スピアマンの順位相関係数の検定

8.1.1 解説

(1) **適合度の検定**

観測度数が与えられた場合にその分布が研究者が考えている理論分布に等しいか否かを判断するための検定法である. n 個の階級の理論確率 p_i, $(i=1,\cdots,n)$, 観測度数 f_i, $(i=1,\cdots,n)$ に対し検定のための χ^2 値:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(f_i-e_i)^2}{e_i}$$

を求め, この値を自由度 $n-1$ の χ^2 分布の臨界値と比較することによって検定する.

(2) **χ^2 検定 (2×2 分割表)**

2×2 分割表において, 2 つの要因の独立性を判断するための検定法である.

	A	$\bar{A}$	合計
B	a_{11}	a_{12}	$a_{11}+a_{12}$
$\bar{B}$	a_{21}	a_{22}	$a_{21}+a_{22}$
合計	$a_{11}+a_{21}$	$a_{12}+a_{22}$	n

上のような 2×2 分割表において A は要因 A で注目している特性を持つことを意味し, $\bar{A}$ はその特性を持たないことを意味する. B と $\bar{B}$ についても同様である. また, a_{ij} は対応する各特性の実測度数を表す. 上のような分割表に対する検定量である χ^2 値は

$$\chi^2=\frac{n\left(|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|-\dfrac{n}{2}\right)^2}{(a_{11}+a_{12})(a_{21}+a_{22})(a_{11}+a_{21})(a_{12}+a_{22})}$$

で与えられる. ここで, $n=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}$. なお, この式にはイエツの修正項 (連続修正項)$-\frac{n}{2}$ が含まれている. この χ^2 値を自由度 1 の χ^2 分布の臨界値と比較することによって検定する.

(3) **χ^2 検定 ($m\times n$ 分割表)**

$m\times n$ 分割表において, 2 つの要因の独立性を判断するための検定法である.

	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n	計
A_1	a_{11}	a_{12}		$\vdots$		a_{1n}	$a_{1\cdot}$
A_2	a_{21}	a_{22}		$\vdots$		a_{2n}	$a_{2\cdot}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
A_i	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	$\cdots$	$a_{i\cdot}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}		$\vdots$		a_{mn}	$a_{m\cdot}$
計	$a_{\cdot 1}$	$a_{\cdot 2}$	$\cdots$	$a_{\cdot j}$	$\cdots$	$a_{\cdot n}$	S

上のような $m\times n$ 分割表において A_i は要因 A で注目している第 i 水準の特性を持つことを意味し, 各水準は独立であるとしている. B_j と要因 B についても同様である. a_{ij} は要因 A の第 i 水準と要因 B の第 j 水準の両方の特性を持つ対象の実測度数を表す. 上のような分割表に対する χ^2 値:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

を求め, この値を自由度 $(m-1)(n-1)$ の χ^2 分布の臨界値と比較することによって検定する. ここで, 行の合計:

$$a_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

列の合計:

$$a_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

総合計:

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

期待値:

$$e_{ij} = \frac{a_{i\cdot} \cdot a_{\cdot j}}{S}$$

(4) **中央値検定**

中央値検定は, 2 群の中央値が等しいという仮説を検定するための方法である. χ^2 値を求め, この値を自由度 1 の χ^2 分布の臨界値と比較することによって検定する.

(5) **符号検定**

符号検定は, 2 つの標本の観測値のおのおのに対応があり, 大小判断 (同値判断を含む) が可能である場合, 「大であるという判断」(+) が出現する確率と「小であるという判断」(−) が出現する確率が等しいという仮説を検定する検定には標準正規分布の臨界値を用いる.

(6) **ウィルコクソン検定**

符号検定をより精密にした検定である. 検定には標準正規分布の臨界値を用いる.

(7) **マン・ホイットニの U 検定**

マン・ホイットニの U 検定は, 独立な 2 組の標本が与えられたときにそれぞれの標本が属している母集団の分布が等しいか否かを検定する. 検定には標準正規分布の臨界値を用いる.

(8) **スピアマンの順位相関係数の検定**

n 個の対になった観測値 (x_i, y_i), $(i = 1, \cdots, n)$ が与えられた場合に, x_i, y_i それぞれ独立に順位をつけ, その順位得点をそれぞれ $R(x_i)$, $R(y_i)$ と表すと, スピアマンの順位相関係数 r_s は

$$r_s = 1 - \frac{6\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(R(x_i) - R(y_i))^2}{n^3 - n}$$

で定義される. スピアマンの順位相関係数は $R(x_i)$ と $R(y_i)$ との関連の強さを表す指標である. この指標を用いることによって x_i と y_i の間に相関がないという仮説を検定できる.

8.1.2 参考文献

(1) 武藤眞介, “統計解析ハンドブック”, 朝倉書店 (1995).

8.2 χ^2 分布による検定

8.2.1 D5CHEF, R5CHEF 適合度の検定

(1) **機 能**

与えられた観測度数の期待度数 (理論度数) への適合度に関する検定を行う.

なお, n 個の階級の理論確率 p_i, $(i = 1, \cdots, n)$, 観測度数 f_i, $(i = 1, \cdots, n)$ に対する値は, それぞれ次式で定義される.

全階級の総度数:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

第 i 階級の期待度数 (理論度数):

$$e_i = S \cdot p_i$$

検定のための χ^2 値:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

自由度:

$$\phi = n - 1$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D5CHEF (P, N, F, IDF, CHI, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R5CHEF (P, N, F, IDF, CHI, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\\text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	P	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N	入 力	理論確率 $\{p_i\}$
2	N	I	1	入 力	観測度数の階級数 n
3	F	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	N	入 力	観測度数 $\{f_i\}$
4	IDF	I	1	出 力	自由度 ϕ
5	CHI	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	1	出 力	χ^2 の値
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥2

(b) 0<P(i)<1　(i=1, ···, N)

(c) $\sum_{i=1}^{N} P(i) \leq 1$

(d) F(i)≥ 0　(i=1, ···, N)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 与えられた理論確率 P(i),　$(i = 1, \cdots, N)$ について

$$P(N) = 1 - \sum_{i=1}^{N-1} P(i)$$

とおき直して誤差を少なくしている.

(7) **使用例**

(a) 問 題

階級数が 7 で, 各階級ごとの理論確率 p_i と観測度数 f_i が以下のように与えられているとき, 観測度数の期待度数 (理論度数) への適合度に関する検定を行う.

階級	p_i	f_i
1	0.1	10
2	0.2	20
3	0.3	30
4	0.1	10
5	0.1	10
6	0.12	12
7	0.05	5

(b) 入力データ

理論確率 p_i, 観測度数 f_i, N=7

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B5CHEF
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( N = 7 )
      DIMENSION P(N),F(N)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) P(I)
  100 CONTINUE
      DO 110 I=1,N
         READ(5,*) F(I)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) N
      DO 120 I=1,N
         WRITE(6,6020) P(I),F(I)
  120 CONTINUE
      CALL D5CHEF(P,N,F,IDF,CHI,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) IDF
      WRITE(6,6050) CHI
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D5CHEF ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'N = ',I6,/,&
              /,8X,'PROBABILITY VALUE',4X,'FREQUENCY',/,&
               7X,32('-'))
 6020 FORMAT(  7X,F11.2,7X,F11.2)
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'DEGREE OF FREEDOM = ',5X,I6)
 6050 FORMAT( /,7X,'CHI SQUARE VALUE  = ',D15.8)
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D5CHEF ***

   ** INPUT **

       N =      7

        PROBABILITY VALUE    FREQUENCY
       --------------------------------
              0.10             10.00
              0.20             20.00
              0.30             30.00
              0.10             10.00
              0.10             10.00
              0.12             12.00
              0.05              5.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       DEGREE OF FREEDOM =           6

       CHI SQUARE VALUE  =  0.10670103D+01
```

8.2.2 D5CHTT, R5CHTT
χ^2 検定 (2×2 分割表)

(1) **機 能**

2×2 の分割表を用いてイエツの修正項を含む検定量である χ^2 値を求める.

	A	$\bar{A}$	合計
B	a_{11}	a_{12}	$a_{11}+a_{12}$
$\bar{B}$	a_{21}	a_{22}	$a_{21}+a_{22}$
合計	$a_{11}+a_{21}$	$a_{12}+a_{22}$	n

上のような 2×2 分割表において A は要因 A で注目している特性を持つことを意味し, $\bar{A}$ はその特性を持たないことを意味する. B と $\bar{B}$ についても同様である. また, a_{ij} は対応する各特性の実測度数を表す. 上のような分割表に対する検定量である χ^2 値は

$$\chi^2 = \frac{n\left(|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| - \dfrac{n}{2}\right)^2}{(a_{11}+a_{12})(a_{21}+a_{22})(a_{11}+a_{21})(a_{12}+a_{22})}$$

ここで, $n = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$.

なお, χ^2 検定では, この χ^2 値を自由度 1 の χ^2 分布の臨界値と比較することによって 2 つの要因の独立性を判断する.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D5CHTT (F, CHI, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R5CHTT (F, CHI, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	F	{D / R}	2,2	入 力	分割表を構成している観測度数 a_{ij}
2	CHI	{D / R}	1	出 力	χ^2 の値
3	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) F(i, j)≥0　(i=1, 2; j=1, 2)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	全ての観測度数が 0 であった.	χ^2 に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 分割表の観測度数は以下のような実行列 (2 次元配列型) として配列 F に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

2×2 の分割表

	A	$\bar{A}$	合計
B	6	0	6
$\bar{B}$	1	3	4
合計	7	3	10

を用いてイエツの修正項を含む検定量である χ^2 値を求める.

(b) 入力データ

F(1, 1)=6.0, F(2, 1)=1.0, F(1, 2)=0.0, F(2, 2)=3.0

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B5CHTT
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      DIMENSION F(2,2)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR   =   0
      DO 100 I=1,2
         READ(5,*) (F(I,J),J=1,2)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010)
      DO 110 I=1,2
         WRITE(6,6020) (F(I,J),J=1,2)
  110 CONTINUE
      CALL D5CHTT(F,CHI,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) CHI
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D5CHTT ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'TWO-BY-TWO CONTINGENCY TABLE',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'CHI SQUARE VALUE = ',D15.8)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D5CHTT ***

  ** INPUT **

      TWO-BY-TWO CONTINGENCY TABLE

               6.00         0.00
               1.00         3.00

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      CHI SQUARE VALUE =  0.33531746D+01
```

8.2.3 D5CHMN, R5CHMN χ^2 検定 ($m \times n$ 分割表)

(1) **機 能**

$m \times n$ の分割表を用いて検定量である χ^2 値を求める.

	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n	計
A_1	a_{11}	a_{12}		$\vdots$		a_{1n}	$a_{1\cdot}$
A_2	a_{21}	a_{22}		$\vdots$		a_{2n}	$a_{2\cdot}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
A_i	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	$\cdots$	$a_{i\cdot}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}		$\vdots$		a_{mn}	$a_{m\cdot}$
計	$a_{\cdot 1}$	$a_{\cdot 2}$	$\cdots$	$a_{\cdot j}$	$\cdots$	$a_{\cdot n}$	S

上のような $m \times n$ 分割表において A_i は要因 A で注目している第 i 水準の特性を持つことを意味し, 各水準は独立であるとしている. B_j と要因 B についても同様である. a_{ij} は要因 A の第 i 水準と要因 B の第 j 水準の両方の特性を持つ対象の実測度数を表す. 上のような分割表に対する検定量である χ^2 値は

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

で与えられる. ここで
期待値:

$$e_{ij} = \frac{a_{i\cdot}\cdot a_{\cdot j}}{S}$$

行の合計:

$$a_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

列の合計:

$$a_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

総合計:

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

なお, χ^2 検定では, この χ^2 値を自由度 $(m-1)(n-1)$ の χ^2 分布の臨界値と比較することによって 2 つの要因の独立性を判断する.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D5CHMN (A, NA, M, N, IDF, CHI, WK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R5CHMN (A, NA, M, N, IDF, CHI, WK, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D / R}	NA,N	入 力	分割表を構成している観測度数 (a_{ij})
2	NA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	M	I	1	入 力	分割表の行数 m
4	N	I	1	入 力	分割表の列数 n
5	IDF	I	1	出 力	自由度 ϕ
6	CHI	{D / R}	1	出 力	χ^2 の値
7	WK	{D / R}	MAX(M, N)	ワーク	作業領域
8	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) NA≥M≥2

(b) N≥2

(c) A(i, j)≥0　(i=1, ⋯, M;　j=1, ⋯, N)

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	一つ, またはそれ以上の区画で期待値が 1.0 以下である.	CHI, IDF は計算される.
3000	制限条件 (a), (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (c) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
4000	全ての観測度数が 0.0 であるか, 期待値が 0.0 以下になった.	処理を打ち切る.

(6) 注意事項

(a) 分割表の観測度数は $A = (a_{i,j})$ として定義する $m \times n$ 実行列 (2 次元配列型) として配列 A に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(7) **使用例**

(a) 問 題

3×4 分割表の観測度数に対応する次のような 3×4 行列

$$\begin{bmatrix} 34 & 50 & 24 & 12 \\ 22 & 65 & 115 & 24 \\ 12 & 41 & 68 & 20 \end{bmatrix}$$

を用いて χ^2 値を求める.

(b) 入力データ

観測度数に対応する配列 A, NA=5, M=3, N=4

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B5CHMN
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( NA = 5, N = 4 )
      DIMENSION A(NA,N),WK(NA)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      READ(5,*) M
      DO 100 I=1,M
         READ(5,*) (A(I,J),J=1,N)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) M,N
      DO 110 I=1,M
         WRITE(6,6020) (A(I,J),J=1,N)
  110 CONTINUE
      CALL D5CHMN(A,NA,M,N,IDF,CHI,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) IDF
      WRITE(6,6050) CHI
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D5CHMN ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'M = ',I6,5X,'N = ',I6,/,&
              /,7X,'CONTINGENCY TABLE',/)
 6020 FORMAT(  7X,5(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'DEGREE OF FREEDOM = ',5X,I6)
 6050 FORMAT( /,7X,'CHI SQUARE VALUE  = ',D15.8)
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D5CHMN ***

   ** INPUT **

       M =      3     N =      4

       CONTINGENCY TABLE

               34.00        50.00        24.00        12.00
               22.00        65.00       115.00        24.00
               12.00        41.00        68.00        20.00

   ** OUTPUT **

       IERR =      0

       DEGREE OF FREEDOM =           6

       CHI SQUARE VALUE  =  0.48649182D+02
```

8.2.4 D5CHMD, R5CHMD
中央値検定

(1) **機 能**

2 つの独立な標本について中央値検定法を用い, 検定量である χ^2 値を求める.
なお, 2 つの標本の観測値 x_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ と y_j, $(j = 1, 2, \cdots, m)$ に対する値は, それぞれ次式で定義される.
χ^2 値:

$$\chi^2 = \frac{(n+m)\left(|\,a \cdot d - b \cdot c\,| - \dfrac{n+m}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

ここで,
$a : x_i$ の中で $(n+m)$ 個の観測値の中央値より大なる観測値の数
$b : x_i$ の中で $(n+m)$ 個の観測値の中央値より小なる観測値の数
$c : y_j$ の中で $(n+m)$ 個の観測値の中央値より大なる観測値の数
$d : y_j$ の中で $(n+m)$ 個の観測値の中央値より小なる観測値の数
ただし, $(n+m)$ 個の観測値の中央値と等しい観測値の場合, それぞれの標本において, 大小の両方に 0.5 ずつ度数を加えたものである.
なお, 中央値検定では, この χ^2 値を自由度 1 の χ^2 分布の臨界値と比較することによって 2 群の中央値が等しいという仮説を検定する.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:
CALL D5CHMD (A, N, B, M, CHI, WK, IERR)
単精度サブルーチン:
CALL R5CHMD (A, N, B, M, CHI, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D / R}	N	入 力	標本 A の観測値 $\{x_i\}$
2	N	I	1	入 力	標本 A の観測値数 n
3	B	{D / R}	M	入 力	標本 B の観測値 $\{y_i\}$
4	M	I	1	入 力	標本 B の観測値数 m
5	CHI	{D / R}	1	出 力	χ^2 の値
6	WK	{D / R}	N+M	ワーク	作業領域
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥2

(b) M≥2

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	標本 A と 標本 B が互いに素である.	CHI に 0.0 を設定する.
3000	制限条件 (a), (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

なし

(7) **使用例**

(a) 問 題

2 つの独立な標本に対する観測値

$$\{x_i\} = \{160, 160, 140, 190\}$$

および

$$\{y_i\} = \{117, 145, 147, 120, 150, 120\}$$

について, 中央値検定法を用い, χ^2 値を求める.

(b) 入力データ

観測値 $\{x_i\}$, N=4, 観測値 $\{y_i\}$, M=6

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B5CHMD
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( N = 4, M = 6 )
      DIMENSION A(N),B(M),WK(N+M)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) A(I)
  100 CONTINUE
      DO 110 I=1,M
         READ(5,*) B(I)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,6010) N,M
      WRITE(6,6020) 'A',(A(I),I=1,N)
      WRITE(6,6020) 'B',(B(I),I=1,M)
      CALL D5CHMD(A,N,B,M,CHI,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) CHI
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D5CHMD ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'N = ',I6,5X,'M = ',I6)
 6020 FORMAT( /,7X,'OBSERVATIONS ',A,/,/,&
                 2(6X,5(2X,F11.2),/))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'CHI SQUARE VALUE = ',D15.8)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D5CHMD ***

  ** INPUT **

      N =      4     M =      6

      OBSERVATIONS A
```

```
          160.00        160.00        140.00        190.00

    OBSERVATIONS B

          117.00        145.00        147.00        120.00        150.00
          120.00

** OUTPUT **

    IERR =      0

    CHI SQUARE VALUE =  0.41666667D+00
```

8.3 その他分布による検定

8.3.1 D5TESG, R5TESG
符号検定

(1) **機 能**

2 つの標本の観測値のおのおのに対応がある場合, 符号検定を行う.

(X,Y) を確率変数の対とし, これについての実現値として n 個の観測値の組 (x_i, y_i), $(i=1,2,\cdots,n)$ が与えられた時, 帰無仮説 H_0 :「$P_r(X>Y)=P_r(X<Y)=0.5$」を対立仮説 H_1 :「$P_r(X>Y)>0.5$ (または <0.5)」に対して検定する.

なお, n 個の観測値の組 (x_i, y_i), $(i=1,2,\cdots,n)$ に対する値は, それぞれ次式で定義される.

観測値から次の様な a, b, x, m を求める.

$$a : x_i > y_i \text{である観測値の対の数.}$$

$$b : x_i < y_i \text{である観測値の対の数.}$$

$$x = \min(a,b)$$

$$m = a+b$$

確率:

- $m \le 25$ の場合

$$P = \frac{1}{2^m}\sum_{i=0}^{x}\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}$$

- $m > 25$ の場合

$$P = \int_{-\infty}^{Z}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

ここで,

$$Z = \frac{x+0.5-\dfrac{m}{2}}{\dfrac{1}{2}\sqrt{m}}$$

(Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.)

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D5TESG (A, N, B, IZR, ISN, P, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R5TESG (A, N, B, IZR, ISN, P, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	N	入 力	標本 A の観測値 $\{x_i\}$
2	N	I	1	入 力	2 標本おのおのの観測値数 n
3	B	{D/R}	N	入 力	標本 B の観測値 $\{y_i\}$
4	IZR	I	1	出 力	標本 A と B の対応する観測値の差でゼロとならないものの個数 m
5	ISN	I	1	出 力	対応する観測値の差の符号の少ない方の個数 (+ または − の数) x
6	P	{D/R}	1	出 力	確率 (片側検定) P
7	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥1

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	標本 A と B が等しい (IZR=0).	ISN=0, P=1 を設定する.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 2 標本の観測値数は等しくなければならない.

(b) このサブルーチンを使うと片側検定となるが, この手法を両側検定に用いるときは, 有意水準 α とすると,

$$P \leq \frac{\alpha}{2}$$

のとき, 帰無仮説を棄却する.

(7) **使用例**

(a) 問 題

2 つの標本の観測値の組

$$\{(x_i, y_i)\} = \{(4,2),(4,3),(5,3),(5,3),(3,3),(2,3),(5,3),(3,3),(1,2),(5,3),(5,2),(5,2),(4,5),(5,2),(5,5),(5,3),(5,1)\}$$

に対して符号検定を行う.

(b) 入力データ

観測値の組 $\{(x_i, y_i)\}$, N=17

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B5TESG
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( N = 17 )
      DIMENSION A(N),B(N)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) A(I),B(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) N
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6020) I,A(I),B(I)
  110 CONTINUE
      CALL D5TESG(A,N,B,IZR,ISN,P,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) IZR
      WRITE(6,6050) ISN
      WRITE(6,6060) P
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D5TESG ***',/,&
              /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'N = ',I6,/,&
              /,7X,'OBSERVATIONS',/,&
              /,11X,'NO.',9X,'A',12X,'B',/,&
               9X,31('-'))
 6020 FORMAT(  7X,I6,2(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
              /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'NUMBER OF PAIRS = ',I6)
 6050 FORMAT( /,7X,'NUMBER OF SIGNS = ',I6)
 6060 FORMAT( /,7X,'PROBABILITY = ',D15.8,2X,&
                    'SIGNIFICANT AT 0.05 LEVEL')
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D5TESG ***

  ** INPUT **

      N =     17

      OBSERVATIONS

          NO.         A            B
        -------------------------------
           1         4.00         2.00
           2         4.00         3.00
           3         5.00         3.00
           4         5.00         3.00
           5         3.00         3.00
           6         2.00         3.00
           7         5.00         3.00
           8         3.00         3.00
           9         1.00         2.00
          10         5.00         3.00
          11         5.00         2.00
          12         5.00         2.00
          13         4.00         5.00
          14         5.00         2.00
          15         5.00         5.00
          16         5.00         3.00
          17         5.00         1.00

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      NUMBER OF PAIRS =     14

      NUMBER OF SIGNS =      3

      PROBABILITY =  0.28686523D-01  SIGNIFICANT AT 0.05 LEVEL
```

8.3.2 D5TEWL, R5TEWL ウィルコクソン検定

(1) **機 能**

2 つの標本の観測値のおのおのに対応がある場合, ウィルコクソン検定を行う.
(X, Y) を確率変数の対とし, これについての実現値として n 個の観測値の組 (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられた時, 帰無仮説 H_0 :「$P_r(X > Y) = P_r(X < Y) = 0.5$」を対立仮説 H_1 :「$P_r(X > Y) > 0.5$ (または < 0.5)」に対して検定する.
なお, n 個の観測値の組 (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対する値は, それぞれ次式で定義される.
2 標本の対応している観測値の差:

$$d_i = x_i - y_i, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

観測値から次のような m, R_i, T_P, T_N を求める.

m : 0 でない d_iの個数.

R_i : 0 でない d_iについて, その絶対値につけた順位.同順位には平均順位をつける.

T_P : 正の d_iにつけられた順位の和.

T_N : 負の d_iにつけられた順位の和.

検定統計量:

$$T = \min (T_P, T_N)$$

T の期待値:

$$E[T] = \frac{m(m+1)}{4}$$

T の分散:

$$V[T] = \frac{m(m+1)(2 \cdot m + 1)}{24}$$

確率:

$$P = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ここで,

$$Z = \frac{T - E[T]}{\sqrt{V[T]}}$$

(T を正規化した Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.)

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:
CALL D5TEWL (A, N, B, IZR, T, Z, P, IWK, WK, IERR)
単精度サブルーチン:
CALL R5TEWL (A, N, B, IZR, T, Z, P, IWK, WK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	A	{D/R}	N	入力	標本 A の観測値 $\{x_i\}$
2	N	I	1	入力	2 標本おのおのの観測値数 n
3	B	{D/R}	N	入力	標本 B の観測値 $\{y_i\}$
4	IZR	I	1	出力	標本 A と B の対応する観測値の差でゼロとならないものの個数 m
5	T	{D/R}	1	出力	検定統計量 T
6	Z	{D/R}	1	出力	正規分布により T の有意性をはかる値 (T を正規化した値) Z
7	P	{D/R}	1	出力	確率 (片側検定) P
8	IWK	I	3×N	ワーク	作業領域
9	WK	{D/R}	2×N	ワーク	作業領域
10	IERR	I	1	出力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥2

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意味	処理内容
0	正常終了.	
1000	標本 A と B が等しい (IZR=0).	T=0, P=0, Z に表現できる絶対値最大値を設定する.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 2 標本の観測値数は等しくなければならない.

(b) このサブルーチンを使うと片側検定となるが, この手法を両側検定に用いるときは, 有意水準 α とすると,

$$P \le \frac{\alpha}{2}$$

のとき, 帰無仮説を棄却する.

(7) **使用例**

(a) 問 題

2 つの標本に対する観測値の組

$$\{(x_i, y_i)\} = \{(28,36),(96,24),(37,47),(34,73),(85,15),(56,34),(67,80),(56,82),(19,78),(27,41),(61,56),(76,32),(13,31),(43,41)\}$$

に対して, ウィルコクソン検定を行う.

(b) 入力データ

観測値の組 $\{(x_i, y_i)\}$, N=14

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B5TEWL
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( N = 14 )
      DIMENSION A(N),B(N),IWK(3*N),WK(2*N)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) A(I),B(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) N
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6020) I,A(I),B(I)
  110 CONTINUE
      CALL D5TEWL(A,N,B,IZR,T,Z,P,IWK,WK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) IZR
      WRITE(6,6050) T
      WRITE(6,6060) Z
      WRITE(6,6070) P
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D5TEWL ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'N = ',I6,/,&
             /,7X,'OBSERVATIONS',/,&
             /,11X,'NO.',9X,'A',12X,'B',/,&
              9X,31('-'))
 6020 FORMAT(  7X,I6,2(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'NUMBER OF PAIRS   = ',5X,I6)
 6050 FORMAT( /,7X,'STATISTICAL VALUE = ',D15.8)
 6060 FORMAT( /,7X,'NORMALIZED VALUE  = ',D15.8)
 6070 FORMAT( /,7X,'PROBABILITY = ',D15.8,2X,&
                   'NOT SIGNIFICANT AT 0.05 LEVEL')
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D5TEWL ***

  ** INPUT **

      N =     14

      OBSERVATIONS

          NO.         A            B
        -------------------------------
           1       28.00        36.00
           2       96.00        24.00
           3       37.00        47.00
           4       34.00        73.00
           5       85.00        15.00
           6       56.00        34.00
           7       67.00        80.00
           8       56.00        82.00
           9       19.00        78.00
```

```
        10        27.00        41.00
        11        61.00        56.00
        12        76.00        32.00
        13        13.00        31.00
        14        43.00        41.00

** OUTPUT **

    IERR =      0

    NUMBER OF PAIRS   =          14

    STATISTICAL VALUE =  0.49000000D+02

    NORMALIZED VALUE  = -0.21971769D+00

    PROBABILITY =  0.41304551D+00  NOT SIGNIFICANT AT 0.05 LEVEL
```

8.3.3 D5TEMH, R5TEMH マン・ホイットニの U 検定

(1) **機 能**

2 つの独立した標本について, マン・ホイットニの U 検定を行う.
連続な分布関数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ をもつ 2 つの母集団 $\prod_1$, $\prod_2$ から互いに独立にとった n 個の観測値 x_i, $(i = 1, \cdots, n)$ と m 個の観測値 y_j, $(j = 1, \cdots, m)$ が与えられた時 ($n \leq m$ とする), 帰無仮説 H_0 :「$F_1(x) = F_2(x)$」を対立仮説 H_1 :「$F_1(x) > F_2(x)$」または H_1 :「$F_1(x) < F_2(x)$」に対して検定する.
なお, n 個の観測値 x_i, $(i = 1, \cdots, n)$ と m 個の観測値 y_i, $(j = 1, \cdots, m)$ に対する値 ($n \leq m$) は, それぞれ次式で定義される.
観測値から次の様な R_i, T を求める.

R_i : x_iと y_iを合わせた $(n+m)$ 個の観測値につけた順位.同順位には平均順位をつける.

T : x_iにつけられた順位の和.

検定統計量:

$$U = \min(U_1, U_2)$$

ここで,

$$U_1 = n \cdot m + \frac{n(n+1)}{2} - T$$

$$U_2 = n \cdot m - U_1$$

U の期待値:

$$E[U] = \frac{n \cdot m}{2}$$

U の分散:

- 同順位なし
$$V[U] = \frac{n \cdot m(n+m+1)}{12}$$
- 同順位あり
$$V[U] = \frac{n \cdot m}{12(n+m)(n+m-1)}((n+m)^3 - (n+m) - \sum S)$$
ここで,
$$S = \sum (t^3 - t)$$
t : 与えられた順位で同順位をもつものの数.

確率:

$$P = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ここで,

$$Z = \frac{U - E[U]}{\sqrt{V[U]}}$$

(U を正規化した Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.)

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D5TEMH (A, N, M, R, U, Z, P, IWK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R5TEMH (A, N, M, R, U, Z, P, IWK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　　　容
1	A	{D/R}	N+M	入 力	二つの独立した標本のうち, 観測値数の少ない方の観測値を先に, 続いて観測値数の多い方の観測値を入力する
2	N	I	1	入 力	観測値数の少ない方の観測値数 n
3	M	I	1	入 力	観測値数の多い方の観測値数 m
4	R	{D/R}	N+M	出 力	二つの標本を合わせた観測値につけた順位 $\{R_i\}$
5	U	{D/R}	1	出 力	検定統計量 U
6	Z	{D/R}	1	出 力	正規分布により U の有意性をはかる値 (U を正規化した値)Z
7	P	{D/R}	1	出 力	確率 (片側検定) P
8	IWK	I	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** 3×(N+M)
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥1

(b) M≥20

(c) N≤M

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a)∼(c) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) このサブルーチンを使うと片側検定となるが, この手法を両側検定に用いるときは, 有意水準 α とすると,

$$P \leq \frac{\alpha}{2}$$

のとき, 帰無仮説を棄却する.

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値がそれぞれ

$$\{x_i\} = \{13, 12, 12, 10, 10, 10, 10, 9, 8, 8, 7, 7, 7, 7, 7, 6\}$$

および

$$\{y_i\} = \{17, 16, 15, 15, 15, 14, 14, 14, 13, 13, 13, 12, 12, 12, 12, 11, 11, 10, 10, 10, 8, 8, 6\}$$

で与えられる 2 つの独立した標本について, マン・ホイットニの U 検定を行う.

(b) 入力データ

観測値 $\{x_i\}$, N=16, 観測値 $\{y_i\}$, M=23

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B5TEMH
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( N = 16, M = 23 )
      DIMENSION A(N+M),R(N+M),IWK(3*(N+M))
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      DO 100 I=1,N+M
         READ(5,*) A(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) N,M
      WRITE(6,6020) 'A',(A(I),I=1,N)
      WRITE(6,6020) 'B',(A(N+I),I=1,M)
      CALL D5TEMH(A,N,M,R,U,Z,P,IWK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040) U
      WRITE(6,6050) Z
      WRITE(6,6060) P
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D5TEMH ***',/,&
            /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'N = ',I6,5X,'M = ',I6)
 6020 FORMAT( /,7X,'OBSERVATIONS ',A,/,/,&
                 5(6X,5(2X,F11.2),/))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
            /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'U-VALUE          = ',D15.8)
 6050 FORMAT( /,7X,'NORMALIZED VALUE = ',D15.8)
 6060 FORMAT( /,7X,'PROBABILITY = ',D15.8,2X,&
                 'SIGNIFICANT AT 0.05 LEVEL')
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D5TEMH ***

  ** INPUT **

      N =      16     M =      23

      OBSERVATIONS A

             13.00        12.00        12.00        10.00        10.00
             10.00        10.00         9.00         8.00         8.00
              7.00         7.00         7.00         7.00         7.00
              6.00

      OBSERVATIONS B

             17.00        16.00        15.00        15.00        15.00
             14.00        14.00        14.00        13.00        13.00
             13.00        12.00        12.00        12.00        12.00
             11.00        11.00        10.00        10.00        10.00
              8.00         8.00         6.00

  ** OUTPUT **
```

```
IERR =      0
U-VALUE          =  0.64000000D+02
NORMALIZED VALUE = -0.34509547D+01
PROBABILITY =  0.27930370D-03  SIGNIFICANT AT 0.05 LEVEL
```

8.3.4 D5TESP, R5TESP スピアマンの順位相関係数検定

(1) **機 能**

スピアマン (Spearman) の順位相関係数を求め, 2 標本間の相関を検定する.

(X, Y) を確率変数の対とし, これについての実現値として n 個の観測値の組 (x_i, y_i), $(i = 1, \cdots, n)$ が与えられた時, 帰無仮説 H_0 :「X と Y は独立である」を対立仮説 H_1 :「X と Y の間には正の相関がある」または H_1 :「X と Y の間には負の相関がある」に対して検定する.

なお, n 個の観測値の組 (x_i, y_i), $(i = 1, \cdots, n)$ に対する値は, それぞれ次式で定義される.

まず, 2 標本別々に順位をつけ, それぞれ a_i, b_i とする. 同順位には平均順位をつける.

スピアマンの順位相関係数:

- 同順位なし

$$r_s = 1 - \frac{6\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}{n^3 - n}$$

- 同順位あり

$$r_s = \frac{(n^3 - n - S_1) + (n^3 - n - S_2) - 12\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}{2\sqrt{(n^3 - n - S_1)(n^3 - n - S_2)}}$$

ここで, S_1 は第 1 標本の修正要因, S_2 は第 2 標本の修正要因で

$$S_1 = \sum({t_1}^3 - t_1)$$

$$S_2 = \sum({t_2}^3 - t_2)$$

t : 与えられた順位で, 同順位をもつものの数.

検定統計量:

$$T = r_s\sqrt{\frac{n-2}{1-{r_s}^2}}$$

(自由度 $n - 2$ の t 分布をする.)

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D5TESP (A, N, B, IDF, R1, R2, RS, T, IWK, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R5TESP (A, N, B, IDF, R1, R2, RS, T, IWK, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	N	入 力	標本 A の観測値 $\{x_i\}$
2	N	I	1	入 力	2 標本おのおのの観測値数 n
3	B	{D/R}	N	入 力	標本 B の観測値 $\{y_i\}$
4	IDF	I	1	出 力	自由度
5	R1	{D/R}	N	出 力	標本 A の観測値につけられた順位 $\{a_i\}$
6	R2	{D/R}	N	出 力	標本 B の観測値につけられた順位 $\{b_i\}$
7	RS	{D/R}	1	出 力	スピアマンの順位相関係数 r_s
8	T	{D/R}	1	出 力	t 分布により RS の有意性をはかる値 T
9	IWK	I	3×N	ワーク	作業領域
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥10

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
4000	RS が −1 または 1 になった.	

(6) **注意事項**

(a) 2 標本の観測値数は等しくなければならない.

(b) R1, R2 の順位はおのおの標本 A と B と対応する.

(c) このサブルーチンを使うと片側検定となるが, この手法を両側検定に用いるときは, 自由度 n, 有意水準 α とすると $t_0\left(n, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ の値で,

$$t \geq t_0\left(n, \frac{\alpha}{2}\right)$$

または,

$$t \leq -t_0\left(n, \frac{\alpha}{2}\right)$$

のとき, 帰無仮説を棄却する.

(7) **使用例**

(a) 問 題

2 つの標本に対する観測値の組

$$\{(x_i, y_i)\} = \{(93,53),(98,46),(76,28),(28,25),(103,65),(99,80),(98,73),(71,44),(74,51),(116,82),(97,54)\}$$

についてスピアマン (Spearman) の順位相関係数を求め, 2 標本間の相関を検定する.

(b) 入力データ

観測値の組 $\{(x_i, y_i)\}$, N=11

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B5TESP
!
      IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
      PARAMETER( N = 11 )
      DIMENSION A(N),B(N),R1(N),R2(N),IWK(3*N)
!
      WRITE(6,6000)
      IERR = 0
      DO 100 I=1,N
         READ(5,*) A(I),B(I)
  100 CONTINUE
      WRITE(6,6010) N
      DO 110 I=1,N
         WRITE(6,6020) I,A(I),B(I)
  110 CONTINUE
      CALL D5TESP(A,N,B,IDF,R1,R2,RS,T,IWK,IERR)
      WRITE(6,6030) IERR
      WRITE(6,6040)
      DO 120 I=1,N
         WRITE(6,6020) I,R1(I),R2(I)
  120 CONTINUE
      WRITE(6,6050) IDF
      WRITE(6,6060) RS
      WRITE(6,6070) T
!
      STOP
 6000 FORMAT(  ' *** D5TESP ***',/,&
             /,3X,'** INPUT **')
 6010 FORMAT( /,7X,'N = ',I6,/,&
             /,7X,'OBSERVATIONS',/,&
             /,11X,'NO.',9X,'A',12X,'B',/,&
              9X,31('-'))
 6020 FORMAT(  7X,I6,2(2X,F11.2))
 6030 FORMAT( /,3X,'** OUTPUT **',/,&
             /,7X,'IERR = ',I6)
 6040 FORMAT( /,7X,'TIED RANKED',/,&
             /,11X,'NO.',9X,'A',12X,'B',/,&
              9X,31('-'))
 6050 FORMAT( /,7X,'DEGREE OF FREEDOM',21X,'= ',5X,I6)
 6060 FORMAT( /,7X,'SPEARMAN RANK CORRELATION COEFFICIENT = ',D15.8)
 6070 FORMAT( /,7X,'STATISTICAL VALUE = ',D15.8,2X,&
                   'SIGNIFICANT AT 0.05 LEVEL')
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D5TESP ***

  ** INPUT **

      N =      11

      OBSERVATIONS

          NO.          A            B
        -------------------------------
           1        93.00        53.00
           2        98.00        46.00
           3        76.00        28.00
           4        28.00        25.00
           5       103.00        65.00
           6        99.00        80.00
           7        98.00        73.00
           8        71.00        44.00
           9        74.00        51.00
          10       116.00        82.00
          11        97.00        54.00

  ** OUTPUT **

      IERR =      0

      TIED RANKED

          NO.          A            B
        -------------------------------
```

```
     1        5.00        6.00
     2        7.50        4.00
     3        4.00        2.00
     4        1.00        1.00
     5       10.00        8.00
     6        9.00       10.00
     7        7.50        9.00
     8        2.00        3.00
     9        3.00        5.00
    10       11.00       11.00
    11        6.00        7.00

DEGREE OF FREEDOM                    =           9

SPEARMAN RANK CORRELATION COEFFICIENT =  0.86105007D+00

STATISTICAL VALUE =  0.50797398D+01  SIGNIFICANT AT 0.05 LEVEL
```

第 9 章　多変量解析

9.1　概 要

各個体についていくつかの組が観測されているとき, そのデータを解析することを**多変量解析**または**多変量分析**という.　本ライブラリでは, 多変量解析を行うための以下の機能を用意している.

- 主成分分析
- 因子分析
- 正準相関分析
- 判別分析
- クラスタ分析

9.1.1 解説

(1) **主成分分析**

主成分分析は多くの変量を少数個の変量によって説明することを目的としている．確率ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ の平均ベクトル, 分散共分散行列をそれぞれ $\boldsymbol{\mu}$, Σ とすると主成分はベクトル $\boldsymbol{c}$ による $\boldsymbol{x}$ の一次結合

$$y = \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c} = 1$$

のうちで

- y_1 は y の分散を $\boldsymbol{c}$ に関して最大にする．
- $k < n$ について $y_1, \cdots, y_k$ が定義されたとき $y_{k+1} = \boldsymbol{c_{k+1}}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$ は $Cov(y, y_i) = 0, i = 1, \cdots, k$ のもとで y の分散を $\boldsymbol{c}$ に関して最大にする．

を満たす n 個の変量 $y_i = \boldsymbol{c_i}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$ を x の第 i 主成分とよび, $\boldsymbol{c_i}$ を第 i 主成分ベクトルと呼ぶ．$\boldsymbol{c_i}$ は Σ の正規直交固有ベクトルとして求まる．すなわち Σ の固有値を $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ とすると, 対応する正規直交固有ベクトルは $C = [\boldsymbol{c_1}, \cdots, \boldsymbol{c_n}]$ となる．第 i 主成分の寄与率は

$$\frac{\lambda_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

として定義され, y_i の分散の全変動にたいする割合を表している．また

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

は第 k 主成分までの累積寄与率という．個体 j の主成分得点ベクトルは

$$\boldsymbol{y_j} = C^T(\boldsymbol{x_j} - \boldsymbol{\mu})$$

で定義される．なお, 一般に $\boldsymbol{\mu}$, Σ は未知であるので代わりに標本平均ベクトル, 標本分散・共分散行列を推定値として用いる．また x の主成分は尺度変換のもとで不変ではないため, 応用上 $\boldsymbol{x}$ の代わりに基準化した変量に対して主成分分析を行う．

(2) **因子分析**

因子分析は, いくつかの変数間の相関関係を (変数の数より少ない)「因子」によって説明することを目的とする方法である．n 個の観測値からなる m 個の変量 x_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ の各観測値を $x_{i,j}$ $(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$, 各変量の平均および分散をそれぞれ $\overline{x_i}$, σ_i^2 とする．各変量に対応する標準化された変数 $z_{i,j}$:

$$z_{i,j} = \frac{x_{i,j} - \overline{x_i}}{\sigma_i}$$

からなるベクトル $\boldsymbol{z}_j = [z_{1,j}, z_{2,j}, \cdots, z_{m,j}]^T$ が次の様な構造を持つと仮定する．

$$\boldsymbol{z}_j = F\boldsymbol{f}_j + \boldsymbol{u}_j$$

ここで, $F = (a_{i,k})$ $(i = 1, 2, \cdots, m;\ k = 1, 2, \cdots, l)$ $\boldsymbol{f}_j = [f_{1,j}, f_{2,j}, \cdots, f_{l,j}]^T$, $\boldsymbol{u}_j = [u_{1,j}, u_{2,j}, \cdots, u_{l,j}]^T$ であり,

- $a_{i,k}$:i 番目の変数の k 番目の因子に関する因子負荷量 (未知定数)
- $f_{k,j}$:j 番目の観測値の第 k 共通因子得点
- $u_{k,j}$:j 番目の観測値の第 k 番目の変数に関する独自因子得点

をそれぞれ表す．このとき, 標準化された変数間の相関係数行列 R は次の様に分解できる．

$$R = FF^T + D = R^* + D$$

ここで, D は対角行列で, その i 番目の主対角項の要素は i 番目の変数に関する**独自性**と呼び, R^* の i 番目の主対角項の要素は i 番目の変数の**共通性**と呼ぶ．R^* の固有値を λ_i, 対応する固有ベクトルを $W = [\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m] = (w_{i,j})$ とおくと l 因子模型が成り立つ場合には, **因子行列** F は

$$F = [\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{w}_1, \cdots, \sqrt{\lambda_l}\boldsymbol{w}_l]$$

と表せる．また, **因子得点** $H = [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n]^T$ は

$$\begin{aligned} H &= ZW \\ (F^T F)W &= F \end{aligned}$$

を解いて得られる．ただし, $Z = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_n]^T$ なお, 一般に因子行列は各因子の具体的な内容を解釈する上で都合の良い形をしていない．そのため, 因子行列に適当な直交回転を施して (**因子の直交回転**), 結果の解釈を容易にする方法が考えられている．因子行列の直交回転を行う場合, どのような因子構造を目指して回転を行うかが問題となるが, 直交回転の基準の代表例として**バリマックス法**がある．この方法では, 各因子の因子負荷量の 2 乗分散のすべての因子についての和 (**バリマックス基準**) を最大にするように因子行列を直交回転する．手順は以下の通り．

① 回転前の共通性を求める．

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, m \text{ (変量の数)}; \quad j = 1, 2, \cdots, k \text{ (因子の数)})$$

$$A = (a_{ij}): \text{ 因子負荷行列}$$

② 因子負荷行列を正規化する．

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{h_i^2}} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, k)$$

③ 因子負荷行列の分散

$$V_c = \sum_{j=1}^{k} \frac{m \sum_{i=1}^{m} \left(b_{ij}^2\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^2\right)^2}{m^2} \quad (c = 1, 2, \cdots, r\text{(最大反復回数)})$$

を最大にする直交回転を行う．

k 因子内の対 (j, j') に対する変換行列 $T_{j,j'}$ は

$$T_{j,j'} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & j\text{ 列目} & & & & j'\text{列目} & & & \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & 0 & \\
 & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cos\theta & \cdots & \cdots & \cdots & -\sin\theta & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \sin\theta & \cdots & \cdots & \cdots & \cos\theta & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\
 & 0 & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1
\end{array}\right] &
\begin{array}{l} \\ \\ \\ j\text{ 行目} \\ \\ \\ \\ j'\text{行目} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

このとき

$$u_i = \frac{a_{ij}}{h_i}, \quad v_i = \frac{a_{ij'}}{h_i}$$

$$p = \sum_{i=1}^{m} (u_i^2 - v_i^2)$$

$$q = 2\sum_{i=1}^{m} u_i v_i$$

$$r = \sum_{i=1}^{m} \{(u_i^2 - v_i^2)^2 - 4u_i^2 v_i^2\}$$

$$s = 4\sum_{i=1}^{m} u_i v_i (u_i^2 - v_i^2)$$

とおくと,

$$\theta = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{s - \dfrac{pq}{m}}{r - \dfrac{p^2 - q^2}{m}} \qquad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

すべての因子の組合せでの回転は,

$$AT_{1,2}T_{1,3}\cdots T_{1,k}T_{2,3}\cdots T_{2,k}\cdots T_{k-1,k}$$

であり, このとき V_c が計算される. 前回の V_{c-1} と比較して,

$$|V_c - V_{c-1}| \leq \varepsilon$$

となれば計算を終わる. この条件を満たさなければ回転をくり返す. ここで, ε は単精度のときは 10^{-7}, 倍精度のときは 10^{-12} である. また, c は回転の反復数を表す.

④ 最終の V_c が計算されたとき, 回転後の因子行列に対する共通性

$$f_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

と, 回転前の共通性との差を計算する.

$$d_i = h_i^2 - f_i$$

(3) **正準相関分析**

n 個の対象について $l{+}m$ 個の変数 x_j $(j = 1, 2, \cdots, l{+}m)$ に対する観測値 $x_{i,j}$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, l{+}m)$ が与えられている場合に, この $l + m$ 個の変数を何らかの基準よって, 2 群に分割し, この 2 群の関係を正準相関係数によって分析する方法を正準相関分析と呼ぶ. 各変数に対する観測値のの平均および分散をそれぞれ $\overline{x_j}$, σ_j^2 とする. 各変数に対応する標準化された結果 $u_{i,j}$ は

$$u_{i,j} = \frac{x_{i,j} - \overline{x_j}}{\sigma_j}$$

いま, (標準化された) 観測値が次の 2 群に分けられているとする.

第 1 群:$u_{i,j}(i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, l)$

第 2 群:$u_{i,j}(i = 1, 2, \cdots, n; j = l + 1, 2, \cdots, l + m)$

このとき値が次の様に定められる合成変数 z, w を考える.

$$z_i = \sum_{j=1}^{l} p_i u_{i,j}$$
$$w_i = \sum_{j=l+1}^{l+m} q_i u_{i,j}$$

ただし, 係数 p_i, q_i は合成変数 z と w のそれぞれの分散 σ_z^2 と σ_w^2 の値が 1 になる様に定める. このとき, 合成変数 z と w は**正準変量**と呼ばれ, z と w の相関係数 ρ_{zw} は**正準相関係数**と呼ばれる. なお, $\sigma_z^2 = \sigma_w^2 = 1$ であるので,

$$\rho_{zw} = \sigma_{zw} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i w_i}{n}$$

が成立する. ここで σ_{zw} は合成変数 z と w の共分散である. 正準相関分析では, 正準相関係数の値を最大にする様に係数 $\boldsymbol{p} = \{p_i\}$, $\boldsymbol{q} = \{q_i\}$ を定め, そのときの正準相関係数の値で分割された 2 群の関係の強さを見る. いま, 第 1 群の相関係数行列を S(大きさ:$l \times l$), 第 2 群の相関係数行列を T(大きさ:$m \times m$), 第 1 群と第 2 群の相関係数行列 R(大きさ:$l \times m$) とすると, 未定常数を λ, μ とするラグランジュの未定係数法を用いることによって次式を得る.

$$R\boldsymbol{q} = \lambda S\boldsymbol{p}$$
$$R^T\boldsymbol{p} = \mu T\boldsymbol{q}$$

いま

$$\sigma_z^2 = \boldsymbol{p}^T S\boldsymbol{p} = 1$$
$$\sigma_w^2 = \boldsymbol{q}^T T\boldsymbol{q} = 1$$

であるので,

$$\lambda = \mu = \rho_{zw}$$
$$S^{-1}RT^{-1}R^T\boldsymbol{p} = \lambda^2\boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{q} = \lambda^{-1}T^{-1}R^T\boldsymbol{p}$$

となり, λ すなわち ρ_{zw} は行列 $S^{-1}RT^{-1}R^T$ の最大固有値から求められる. なお, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ は, 対応する固有ベクトルのうち

$$\boldsymbol{p}^T S\boldsymbol{p} = 1$$
$$\boldsymbol{q}^T T\boldsymbol{q} = 1$$

を満たす様に決定するすれば良い. ゼロでない正準相関係数の個数を正準変量の次元数という. 次元数は帰無仮説

$$H_k : \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_l = 0$$

を対立仮説

$$K_k : H_k \text{でない}$$

に対して検定する仮説検定を逐次行うことによって決定できる. すなわち $H_0, \cdots, H_{k-1}$ が棄却され, H_k が採択されたとき, 次元数を k とする. 検定は次式で定義されるウィルクスの Λ

$$\Lambda_k = \prod_{i=k+1}^{l} (1 - {\lambda_i}^2)$$

を用いると仮説 H_k のもとで

$$\chi_k^2 = -\{n - 0.5(l + m + 1)\} log_e \Lambda_k$$

が漸近的に自由度 $(l-k)(m-k)$ の χ^2 分布に従うという事実をもちいて行う.

(4) **判別分析**

判別分析は, ある個体が k 個の母集団 $\pi_1, \cdots, \pi_k$ のうちどの母集団に属するかを, その個体の観測値にもとづいて判別する問題を扱う. この問題では判別されるべき個体は $\pi_1, \cdots, \pi_k$ のうちどれかに属していることを前提としている. 各母集団が p 次元正規母集団 $N(\boldsymbol{\nu_1}, \Sigma), \cdots, N(\boldsymbol{\nu_k}, \Sigma)$ であるとき, 次の様な線形関数 (**線形判別関数**)

$$y^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nu_i}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu_i}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\nu_i}$$

を用いて

$$\max_j y^j(\boldsymbol{x}) = y^{j_m}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \pi_{j_m}$$

と判別することが出来る. なお, 母数が未知の場合は, それらの推定値を用いて判別する.

(5) **クラスタ分析**

統計的データ解析の立場では分類とは分類対象間に見られる類似性あるいは差異性を表す尺度を用意してこれにしたがってその対象をいくつかの群 (クラスタ) に分けることをいう. この意味で分類は**クラスタ化法**あるいは**クラスタ生成法**と呼ぶことができる. クラスタ分析が分類対象として扱うデータとして (個体)×(変量) の多変量特性値データ行列がある. このとき分類対象として個体と変量の双方が考えられる. いずれの場合にも, クラスタ生成過程では, 分類対象の類似性や差異性を表す測度が必要であり, これを**類似度**あるいは**非類似度**と呼ぶ. (個体)×(変量) の多変量特性値データ行列 (a_{ik}) または (a_{ki}) $(i = 1, 2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, p)$ が与えられて, n の特性を持つ個体または変量を分類対象としたい場合, 非類似度 d_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ としてはたとえば以下のものが用いられる.

- ユークリッド平方距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} - a_{jk})^2 \ (i, j = 1, \cdots, n)$$

- 標準化ユークリッド平方距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \frac{(a_{ik} - a_{jk})^2}{s_k^2} \ (i, j = 1, \cdots, n)$$

ただし, s_k^2 は変量の分散で次式により定義する.

$$s_k^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^{n} (a_{lk} - \bar{a_k})^2 (\bar{a_k} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} a_{lk})$$

これは 各変量の分散を 1 に標準化しておいて, ユークリッド平方距離を求めることと同じである.

- マハラノビスの汎距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{p} (a_{ik} - a_{jk}) v_{km} (a_{im} - a_{jm}) \ (i, j = 1, \cdots, n)$$

ただし, v_{km} は, 個体または変量の分散共分散行列の逆行列の (k, m) 要素である.

- ミンコフスキー距離

$$d_{ij} = \{\sum_{k=1}^{p} \mid a_{ik} - a_{jk} \mid^r\}^{1/r} \ (r \geq 1.0; i, j = 1, \cdots, n)$$

また, 分類を行うためには, 個体または変量をクラスタとして融合した場合の測度も定義しておく必要がある. クラスタ p とクラスタ q を融合して新しくクラスタ t をつくった場合, クラスタ t と別の任意のクラスタ r との間の非類似度 d_{tr} の定義として以下ものが用いられる. ただし, n_p はクラスタ p の中に含まれる対象の数を表す.

- 最短距離法

$$d_{tr} = \min(d_{pr}, d_{qr})$$

- 最長距離法

$$d_{tr} = \max(d_{pr}, d_{qr})$$

- 群平均法

$$d_{tr} = (n_p d_{pr} + n_q d_{qr})/(n_p + n_q)$$

- 重心法

$$d_{tr} = \frac{n_p}{n_p + n_q} d_{pr} + \frac{n_q}{n_p + n_q} d_{qr} - \frac{n_p n_q}{(n_p + n_q)^2} d_{pq}$$

- メジアン法

$$d_{tr} = \frac{1}{2} d_{pr} + \frac{1}{2} d_{qr} - \frac{1}{4} d_{pq}$$

- ウォード法

$$d_{tr} = \frac{n_p + n_r}{n_t + n_r} d_{pr} + \frac{n_q + n_r}{n_t + n_r} d_{qr} - \frac{n_r}{n_t + n_r} d_{pq}$$

- 可変法

$$d_{tr} = \frac{1-\beta}{2} d_{pr} + \frac{1-\beta}{2} d_{qr} + \beta d_{pq} \quad (-\frac{1}{4} \leq \beta \leq 0)$$

ただし, 重心法, メジアン法, ウォード法は非類似度が (標準化) ユークリッド平方距離で与えられることを前提としている.

9.1.2 参考文献

(1) 西田英郎, 佐藤嗣二 共訳, “実例クラスター分析” , 内田老鶴圃.

(2) 石原辰雄, 長谷川勝也, 川口輝久 著, “Lotus1-2-3 活用多変量解析” , 共立出版株式会社 (1990).

(3) 田中豊, 垂水共之, 脇本和昌 編, “パソコン統計解析ハンドブック II 多変量解析編” , 共立出版株式会社 (1984).

(4) 千葉大学統計グループ 訳, “ケンドール 統計学用語辞典” , 丸善株式会社 (1987).

(5) 浅野長一郎, “因子分析法通論” , 共立出版.

(6) 奥野忠一, “多変量解析法” , 日本科学技術連盟.

(7) 松浦義行, “行動科学における因子分析法” , 不昧堂.

(8) 竹内 啓編, “統計学辞典” , 東洋経済新報社.

9.2 主成分分析

9.2.1 D6CPCC, R6CPCC 主成分の累積寄与率

(1) **機 能**

m 個の変量からなる確率ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_m]^T$ の平均ベクトル, 分散共分散行列をそれぞれ $\boldsymbol{\mu}$, Σ とし, Σ の固有値を $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$, 対応する正規直交固有ベクトルを $C = [\boldsymbol{c_1}, \cdots, \boldsymbol{c_m}]$ とすると第 i 主成分の寄与率は

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}$$

として定義され, y_i の分散の全変動にたいする割合を表している. また

$$c_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}$$

は第 k 主成分までの累積寄与率という. 固有値 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$ が与えられた場合に, 与えられた基準値を s として

$$c_k \geq s$$

を満たす最小の $k = k_m$ の値と累積寄与率 c_k $(k = 1, 2, \cdots, k_m)$ を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6CPCC (A, M, CONS, CP, NUM, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6CPCC (A, M, CONS, CP, NUM, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	M	入 力	固有値 λ_i (注意事項 (a) 参照)
2	M	I	1	入 力	変量の数 m
3	CONS	I	1	入 力	基準値 s
4	CP	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	M	出 力	累積寄与率 c_k の値
5	NUM	I	1	出 力	k_m の値
6	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $\mathrm{M} \geq 1$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 固有値は, 昇順に並べられていなければならない.

9.2.2 D6CPSC, R6CPSC 主成分の得点

(1) **機 能**

m 個の変量からなる確率ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_m]^T$ の平均ベクトル, 分散共分散行列をそれぞれ $\boldsymbol{\mu}$, Σ とし, Σ の固有値を $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$, 対応する正規直交固有ベクトルを $C = [\boldsymbol{c_1}, \cdots, \boldsymbol{c_m}]$ とすると個体 j の主成分得点ベクトルは

$$\boldsymbol{y_l} = C^T(\boldsymbol{x_j} - \boldsymbol{\mu}) \quad (j, l = 1, 2, \cdots, m)$$

で定義される. m 個の変量に対する n 個の観測値 x_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$ と各変量の平均 μ_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$, 分散共分散行列 Σ の正規直交固有ベクトル $\boldsymbol{c_j} = (c_{jl})$ $(j = 1, 2, \cdots, m; l = 1, 2, \cdots, m)$ が与えられた時に各個体の主成分得点を求める. ここで $k (k \leq m)$ は求める主成分の数を表す. また, σ_j は各変量の標準偏差で, 得点は基準化した変量に対して求めている.

$$y_{il} = \sum_{j=1}^{m} \frac{c_{jl}(x_{ij} - \mu_j)}{\sigma_j} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; l = 1, 2, \cdots, k)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6CPSC (A, MA, M, N, NUM, X1, SD, EV, MEV, Z, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6CPSC (A, MA, M, N, NUM, X1, SD, EV, MEV, Z, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: {32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)}

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D / R}	MA,M	入 力	観測値データの行列 (x_{ij}) (注意事項 (a) 参照)
2	MA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	M	I	1	入 力	変量の数 m
4	N	I	1	入 力	観測値の数 n
5	NUM	I	1	入 力	主成分の数 k
6	X1	{D / R}	M	入 力	各変量ごとの平均 μ_j
7	SD	{D / R}	M	入 力	各変量ごとの標準偏差 σ_j
8	EV	{D / R}	MEV,M	入 力	固有ベクトルからなる行列 (c_{jl}) (注意事項 (a) 参照)
9	MEV	I	1	入 力	配列 EV の整合寸法
10	Z	{D / R}	MA,NUM	出 力	各主成分の得点からなる行列 y_{il} (注意事項 (a) 参照)
11	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $2 \leq \mathrm{N} \leq \mathrm{MA}$

(b) $1 \leq \mathrm{M} \leq \mathrm{MEV}$

(c) $\mathrm{NUM} \geq 1$

(d) $\mathrm{SD(i)} \geq$ 誤差判定のための単位　$(\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{M})$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 行列 (x_{ij}), (c_{jl}) は実行列 (2 次元配列型) として配列 A, EV にそれぞれ格納する. 行列 (y_{il}) は実行列 (2 次元配列型) として配列 Z に格納される. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(7) **使用例**

(a) 問 題
相関係数行列をもとに固有値, 固有ベクトルを求めた後, 固有値の累積寄与率, 主成分の得点等を求める.

(b) 入力データ
配列 A に格納する観測値データ行列

$$\begin{bmatrix} 90.0 & 91.0 & 98.0 & 90.0 \\ 92.0 & 97.0 & 94.0 & 92.0 \\ 94.0 & 93.0 & 90.0 & 97.0 \\ 97.0 & 94.0 & 95.0 & 95.0 \\ 99.0 & 105.0 & 94.0 & 106.0 \\ 102.0 & 103.0 & 103.0 & 107.0 \\ 104.0 & 95.0 & 110.0 & 110.0 \\ 105.0 & 106.0 & 107.0 & 104.0 \\ 108.0 & 109.0 & 105.0 & 100.0 \\ 109.0 & 107.0 & 104.0 & 99.0 \end{bmatrix}$$

配列 R に格納する相関係数行列

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.8000 & 0.7650 & 0.6400 \\ 0.8000 & 1.0000 & 0.4500 & 0.4575 \\ 0.7650 & 0.4500 & 1.0000 & 0.5800 \\ 0.6400 & 0.4575 & 0.5800 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{X1(1)} = 100.0$
$\mathrm{X1(2)} = 100.0$
$\mathrm{X1(3)} = 100.0$

X1(4) = 100.0

SD(1) = 6.6667

SD(2) = 6.6667

SD(3) = 6.6667

SD(4) = 6.6667

MA = 10, MEV = 4, M = 4 N = 10, CONS = 0.80

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B6CPSC
! *** EXAMPLE OF D6CPCC,D6CPSC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER(MEV=4,MA=10,M=4,N=10,CONS=0.8D0)
      DIMENSION A(MA,M),X1(M),SD(M),R(M,M),EV(MEV,M),E(M),Z(MA,M),&
                W1(M),CP(M)
!
      READ(5,*) ((A(I,J),I=1,N),J=1,M)
      READ(5,*) ((R(I,J),I=1,M),J=1,M)
      READ(5,*) (X1(I),I=1,M)
      READ(5,*) (SD(I),I=1,M)
      WRITE(6,2000) MA,MEV,M,N,CONS
      DO 10 I=1,N
        WRITE(6,2010) (A(I,J),J=1,M)
   10 CONTINUE
      WRITE(6,2060)
      WRITE(6,2010) (X1(I),I=1,M)
      WRITE(6,2070)
      WRITE(6,2010) (SD(I),I=1,M)
      DO 20 J=1,M
        DO 30 I=1,M
          EV(I,J)=R(I,J)
   30   CONTINUE
   20 CONTINUE
      CALL DCSMAA(EV,MEV,M,E,W1,IERR)
      WRITE(6,2020) (E(I),I=1,M)
      WRITE(6,2030)
      DO 40 I=1,M
        WRITE(6,2010) (EV(I,J),J=1,M)
   40 CONTINUE
!
      CALL D6CPCC(E,M,CONS,CP,NUM,IERR)
      WRITE(6,3000) IERR
      WRITE(6,3020) NUM,(CP(I),I=1,NUM)
      CALL D6CPSC(A,MA,M,N,NUM,X1,SD,EV,MEV,Z,IERR)
      WRITE(6,3010) IERR
      WRITE(6,3030)
      DO 50 I=1,N
        WRITE(6,2010) (Z(I,J),J=1,NUM)
   50 CONTINUE
!
      STOP
!
 2000 FORMAT(' ',/,/,' ** INPUT **',&
      /,/,10X,'MA =',I4,6X,'MEV  =',I4,7X,'  M =',I4,7X,&
       /,10X,'N  =',I4,6X,'CONS =',F7.2,&
      /,/,7X,'*DATA*')
 2010 FORMAT(9X,4F10.4)
 2020 FORMAT(' ',/,/,6X,'*EIGENVALUES*',/,9X,(7F10.4))
 2030 FORMAT(' ',/,/,6X,'*EIGENVECTORS*')
 2060 FORMAT(' ',/,/,6X,'*MEAN OF VARIABLES (X1) *')
 2070 FORMAT(' ',/,/,6X,'*STANDARD DEVIATION (SD) *')
 3000 FORMAT(' ',/,/,' ** OUTPUT(D/R6CPCC) **',/,/,'   IERR = ',I4)
 3010 FORMAT(' ',/,/,' ** OUTPUT(D/R6CPSC) **',/,/,'   IERR = ',I4)
 3020 FORMAT(' ',/,/,6X,'NUM =',I4,/,/,6X,'*CUMULATIVE RATIO (CP) *',&
      /,(7F18.4))
 3030 FORMAT(' ',/,/,6X,'*PRINCIPAL COMPONENT SCORE (Z) *')
      END
```

(d) 出力結果

```
 ** INPUT **

          MA =  10      MEV  =   4         M =   4
          N  =  10      CONS =   0.80

       *DATA*
            90.0000   91.0000   98.0000   90.0000
            92.0000   97.0000   94.0000   92.0000
            94.0000   93.0000   90.0000   97.0000
            97.0000   94.0000   95.0000   95.0000
            99.0000  105.0000   94.0000  106.0000
           102.0000  103.0000  103.0000  107.0000
           104.0000   95.0000  110.0000  110.0000
           105.0000  106.0000  107.0000  104.0000
           108.0000  109.0000  105.0000  100.0000
           109.0000  107.0000  104.0000   99.0000


      *MEAN OF VARIABLES (X1) *
           100.0000  100.0000  100.0000  100.0000


      *STANDARD DEVIATION (SD) *
```

```
          6.6667    6.6667    6.6667    6.6667


     *EIGENVALUES*
          0.0923    0.4352    0.6096    2.8630


     *EIGENVECTORS*
          0.7911    0.1574   -0.1748    0.5647
         -0.4676   -0.1613   -0.7279    0.4748
         -0.3872    0.6555    0.4236    0.4908
         -0.0747   -0.7208    0.5101    0.4634

** OUTPUT(D/R6CPCC) **

  IERR =    0


     NUM =   2

     *CUMULATIVE RATIO (CP) *
         0.7157            0.8681

** OUTPUT(D/R6CPSC) **

  IERR =    0


     *PRINCIPAL COMPONENT SCORE (Z) *
         -2.3304    0.3526
         -1.8891   -0.4561
         -1.9516    0.0566
         -1.3971    0.0334
          0.2467   -0.4419
          1.0905    0.3462
          1.4140    1.8416
          1.6443   -0.0353
          1.6868   -0.8746
          1.4859   -0.8225
```

9.3 因子分析

9.3.1 D6FALD, R6FALD 因子負荷行列

(1) **機 能**

固有値および固有ベクトルをもとに, 因子負荷行列および共通性 (各主成分の寄与率) を求める.

因子負荷行列 (a_{ij}) :

$$a_{ij} = \sqrt{\lambda_j} v_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m \text{ (変量の数)};\ j = 1, 2, \cdots, k \text{ (因子の数)};\ k \leq m)$$

ただし, λ_j $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0)$ は固有値, v_{ij} は固有値 λ_j に対する固有ベクトルの第 i 成分を表す.

共通性

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6FALD (E, M, EV, LME, NUM, FM, LMF, OC, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6FALD (E, M, EV, LME, NUM, FM, LMF, OC, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	E	{D, R}	M	入 力	固有値 λ_j (注意事項 (a), (b) 参照)
2	M	I	1	入 力	固有値の数 m
3	EV	{D, R}	LME, M	入 力	各固有値に対応する固有ベクトルからなる行列 (v_{ij}) (注意事項 (a) 参照)
4	LME	I	1	入 力	配列 EV の整合寸法
5	NUM	I	1	入 力	因子の数 k
6	FM	{D, R}	LMF, NUM	出 力	因子負荷行列 (a_{ij})
7	LMF	I	1	入 力	行列 FM の整合寸法
8	OC	{D, R}	M	出 力	最初の共通性 (各変量に対する寄与率) h_i^2
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $1 \leq \mathrm{NUM} \leq \mathrm{M} \leq \mathrm{LME}, \mathrm{LMF}$

(b) E(i) $(\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{M})$ は昇順に並んでいなければならない.

(c) $\mathrm{E}(\mathrm{M} - \mathrm{NUM} + 1) \geq 0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 固有値は昇順に並べられていなければならない. また, 固有ベクトルは固有値に対応して並べられていなければならない. 固有ベクトルからなる行列 (v_{ij}) と因子負荷行列 (a_{ij}) は実行列 (2 次元配列型) として配列 EV, FM にそれぞれ格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(b) 計算には, 大きいほうから NUM 個の固有値と対応する固有ベクトルが使われる.

9.3.2 D6FAVR, R6FAVR バリマックス基準による回転

(1) **機 能**

バリマックス基準によって因子負荷行列を直交回転する.
また, 直交回転後の以下の量を求める.
共通性

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, m \text{ (変量の数)};\ j = 1, 2, \cdots, k \text{ (因子の数)};$$

ここで, $A = (a_{ij})$ は因子負荷行列を表す.
因子負荷行列の分散

$$V_c = \sum_{j=1}^{k} \frac{m \sum_{i=1}^{m} (b_{ij}^2)^2 - (\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^2)^2}{m^2} \quad (c = 1, 2, \cdots, r(\text{最大直交回転回数}))$$

ここで,

$$b_{ij} = a_{ij} / \sqrt{h_i^2} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, k)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:
　CALL D6FAVR (FM, LMF, M, NUM, IC, COM, LMC, V, IERR)
単精度サブルーチン:
　CALL R6FAVR (FM, LMF, M, NUM, IC, COM, LMC, V, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	FM	{D / R}	LMF, NUM	入 力	回転前の因子負荷行列 (注意事項 (a) 参照)
				出 力	回転後の因子負荷行列
2	LMF	I	1	入 力	配列 FM の整合寸法
3	M	I	1	入 力	変量の数 m
4	NUM	I	1	入 力	因子の数 k
5	IC	I	1	入 力	回転の最大直交回転回数 (注意事項 (b) 参照)
				出 力	実際の直交回転回数
6	COM	{D / R}	LMC, 3	出 力	COM(i, 1):回転前の共通性 COM(i, 2):回転後の共通性 COM(i, 3):(回転前の共通性)− (回転後の共通性) $(\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{M})$
7	LMC	I	1	入 力	配列 COM の整合寸法
8	V	{D / R}	0:IC	出 力	回転の反復回数ごとの因子行列の分散 V(0):回転前の分散 V(i):第 i 回転後の分散 (i=1, ···, IC)
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) 1≤NUM≤M≤LMF, LMC

(b) IC ≥ 1

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
5000	与えられた最大直交回転回数に達しても収束しなかった.	その時点での因子負荷行列, 共通性, 分散を返す.

(6) **注意事項**

(a) 因子負荷行列 (a_{ij}) は実行列 (2 次元配列型) として配列 FM に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(b) IC は 50 程度が適当である.

(7) **使用例**

(a) 問 題

相関係数行列

$$A = \begin{bmatrix} 1.00000 & 0.80000 & 0.76500 & 0.64000 \\ 0.80000 & 1.00000 & 0.45000 & 0.45750 \\ 0.76500 & 0.45000 & 1.00000 & 0.58000 \\ 0.64000 & 0.45750 & 0.58000 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

の固有値・固有ベクトル, 因子負荷行列を求め, さらにバリマックス基準によって因子負荷行列を直交回転し, 回転後の因子負荷行列等を求める.

(b) 入力データ

相関係数行列 A, M=4, LME=5, NUM=2, LMF=5, IC=10, LMC=5

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B6FAVR
! *** EXAMPLE OF D6FALD , D6FAVR ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER (M=4,LME=5,NUM=2,LMF=5,MAXIC=10,LMC=5)
      DIMENSION A(M),EV(LME,M),FM(LMF,NUM),OC(M)
      DIMENSION W1(M),COM(LMC,3),V(0:MAXIC)
!
      READ(5,*) ((EV(I,J),I=1,M),J=1,M)
      WRITE(6,1000)
      IC=MAXIC
      DO 10 I=1,M
        WRITE(6,2000) (EV(I,J),J=1,M)
   10 CONTINUE
      WRITE(6,2100) M,LME,NUM,LMF,IC,LMC
!
      WRITE(6,3000)
      CALL DCSMAA(EV,LME,M,A,W1,IERR)
      WRITE(6,3050) IERR
      WRITE(6,3100)
      WRITE(6,2000) (A(I),I=1,M)
      WRITE(6,3200)
      DO 11 I=1,M
        WRITE(6,2000) (EV(I,J),J=1,M)
   11 CONTINUE
!
      CALL D6FALD(A,M,EV,LME,NUM,FM,LMF,OC,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,4100)
      DO 12 I=1,M
        WRITE(6,4200) (FM(I,J),J=1,NUM)
   12 CONTINUE
      WRITE(6,4300)
      DO 13 I=1,M
        WRITE(6,4400) OC(I)
   13 CONTINUE
      CALL D6FAVR(FM,LMF,M,NUM,IC,COM,LMC,V,IERR)
      WRITE(6,5000) IERR
      WRITE(6,4100)
      DO 14 I=1,M
        WRITE(6,4200) (FM(I,J),J=1,NUM)
   14 CONTINUE
      WRITE(6,5100) IC
      DO 15 I=0,IC
        WRITE(6,5200) I,V(I)
   15 CONTINUE
      WRITE(6,5300)
      DO 16 I=1,M
        WRITE(6,5400) I,COM(I,1),COM(I,2),COM(I,3)
   16 CONTINUE
!
      STOP
!
 1000 FORMAT('  *** D6FALD , D6FAVR ***',/,/,'    ** INPUT DATA **',/,/,&
             7X,'CORRELATION MATRIX')
 2000 FORMAT(5X,4(D15.5))
 2100 FORMAT(' ',/,7X,'M   = ',I3,5X,'LME = ',I3,5X,'NUM = ',I3,&
                 /,7X,'LMF = ',I3,5X,'IC  = ',I3,5X,'LMC = ',I3)
 3000 FORMAT(' ',/,4X,'** OUTPUT **')
 3050 FORMAT(' ',/,5X,'* DCSMAA *',/,/,7X,'IERR = ',I4)
 3100 FORMAT(' ',/,7X,'A(EIGEN VALUE)')
 3200 FORMAT(' ',/,7X,'EV(EIGEN VECTOR)')
 4000 FORMAT(' ',/,5X,'* D6FALD *',/,/,7X,'IERR = ',I4)
 4100 FORMAT(' ',/,7X,'FM(FACTOR LOADING MATRIX)')
 4200 FORMAT(5X,2(D15.5))
 4300 FORMAT(' ',/,7X,'OC(COMMUNALITIES)')
 4400 FORMAT(5X,D15.5)
 5000 FORMAT(' ',/,5X,'* D6FAVR *',/,/,7X,'IERR = ',I4)
 5100 FORMAT(' ',/,7X,'IC = ',I5)
 5200 FORMAT(7X,'V(',I2,') = ',D15.5)
 5300 FORMAT(' ',/,7X,'COM(COMMUNALITIES)',/,8X,'VARIABLE',4X,&
      '(ORIGINAL)',7X,'(FINAL)',5X,'(DIFFERENCE)')
```

```
 5400 FORMAT(7X,I9,3(D15.5))
!
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D6FALD , D6FAVR ***

   ** INPUT DATA **

      CORRELATION MATRIX
        0.10000D+01    0.80000D+00    0.76500D+00    0.64000D+00
        0.80000D+00    0.10000D+01    0.45000D+00    0.45750D+00
        0.76500D+00    0.45000D+00    0.10000D+01    0.58000D+00
        0.64000D+00    0.45750D+00    0.58000D+00    0.10000D+01

      M   =   4     LME =   5     NUM =   2
      LMF =   5     IC  =  10     LMC =   5

   ** OUTPUT **

    * DCSMAA *

      IERR =    0

      A(EIGEN VALUE)
        0.92284D-01    0.43517D+00    0.60958D+00    0.28630D+01

      EV(EIGEN VECTOR)
        0.79110D+00    0.15737D+00   -0.17478D+00    0.56467D+00
       -0.46764D+00   -0.16135D+00   -0.72787D+00    0.47485D+00
       -0.38715D+00    0.65553D+00    0.42364D+00    0.49084D+00
       -0.74704D-01   -0.72075D+00    0.51008D+00    0.46341D+00

    * D6FALD *

      IERR =    0

      FM(FACTOR LOADING MATRIX)
        0.95543D+00   -0.13646D+00
        0.80345D+00   -0.56829D+00
        0.83052D+00    0.33076D+00
        0.78410D+00    0.39825D+00

      OC(COMMUNALITIES)
        0.93147D+00
        0.96849D+00
        0.79917D+00
        0.77342D+00

    * D6FAVR *

      IERR =    0

      FM(FACTOR LOADING MATRIX)
        0.62188D+00   -0.73806D+00
        0.22093D+00   -0.95900D+00
        0.83984D+00   -0.30634D+00
        0.85015D+00   -0.22507D+00

      IC =      4
      V( 0) =      0.25744D-01
      V( 1) =      0.19491D+00
      V( 2) =      0.23676D+00
      V( 3) =      0.26226D+00
      V( 4) =      0.26226D+00

      COM(COMMUNALITIES)
       VARIABLE    (ORIGINAL)       (FINAL)      (DIFFERENCE)
              1    0.93147D+00    0.93147D+00    0.00000D+00
              2    0.96849D+00    0.96849D+00   -0.11102D-15
              3    0.79917D+00    0.79917D+00   -0.22204D-15
              4    0.77342D+00    0.77342D+00    0.11102D-15
```

9.4 正準相関分析

9.4.1 D6CVAN, R6CVAN 正準相関分析

(1) **機 能**

2 群の観測値について正準相関分析を行うために以下の処理を行う.
第 1 群の相関係数行列を R_{11}(大きさ:$m_1 \times m_1$),
第 2 群の相関係数行列を R_{22}(大きさ:$m_2 \times m_2$),
第 1 群と第 2 群の相関係数行列 R_{12}(大きさ:$m_1 \times m_2$)
を与えて, 相関分析を行うために固有値問題

$$
\begin{aligned}
{R_{11}}^{-1} R_{12} {R_{22}}^{-1} {R_{12}}^T \boldsymbol{p} &= \lambda^2 \boldsymbol{p} \\
\boldsymbol{q} &= \lambda^{-1} {R_{22}}^{-1} {R_{12}}^T \boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

を解く. なお相関係数行列はまとめて次のような行列 R として定義する.

$$
\left[\begin{array}{cc} R_{11} & {R_{12}}^T \\ R_{12} & R_{22} \end{array} \right]
$$

次に得られた固有値 ${\lambda_i}^2$ と固有ベクトル $\boldsymbol{p_i}$, $\boldsymbol{q_i}$ から次式で定義される正準相関係数, ウィルクスの Λ, ならびに各群の正準係数を求める. 正準相関係数$=\lambda_i$ $(i = 1, \cdots, m)$
ただし, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m$, $m = min(m_1, m_2)$.
ウィルクスの Λ:

$$
\Lambda_k = \prod_{i=k+1}^{l} (1 - {\lambda_i}^2)
$$

第 1 群の正準係数:$(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \cdots, \boldsymbol{p_m})$
第 2 群の正準係数:$(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \cdots, \boldsymbol{q_m})$
ゼロでない正準相関係数の個数を正準変量の次元数という. 次元数は
帰無仮説

$$
H_k : \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_l = 0
$$

を対立仮説

$$
K_k : H_k \text{でない}
$$

に対して検定する仮説検定を逐次行うことによって決定できる. すなわち $H_0, \cdots, H_{k-1}$ が棄却され, H_k が採択されたとき, 次元数を k とする. 検定はウィルクスの Λ を用いると仮説 H_k のもとで

$$
\chi_k^2 = -\{n - 0.5(m_1 + m_2 + 1)\} \log_e \Lambda_k
$$

が漸近的に自由度 $(m_1 - k)(m_2 - k)$ の χ^2 分布に従うという事実をもちいて行う.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6CVAN (N, M1, M2, R, MR, CO, CO1, MCO1, CO2, MCO2, E, WIL, CHI, NDF, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6CVAN (N, M1, M2, R, MR, CO, CO1, MCO1, CO2, MCO2, E, WIL, CHI, NDF, W1, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	N	I	1	入 力	観測値の数
2	M1	I	1	入 力	第 1 群の変量の数
3	M2	I	1	入 力	第 2 群の変量の数
4	R	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	内容参照	入 力	相関係数行列 R **大きさ:** (MR, (M1 + M2))
5	MR	I	1	入 力	配列 R の整合寸法
6	CO	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	M1	出 力	正準相関係数
7	CO1	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	MCO1, M1	出 力	第 1 群の正準係数行列
8	MCO1	I	1	入 力	配列 CO1 の整合寸法
9	CO2	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	MCO2, M1	出 力	第 2 群の正準係数行列
10	MCO2	I	1	入 力	配列 CO2 の整合寸法
11	E	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	M1	出 力	固有値
12	WIL	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	M1	出 力	ウィルクスの Λ
13	CHI	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	M1	出 力	χ^2 の値 χ_k^2
14	NDF	I	M1	出 力	χ^2 検定のための自由度
15	W1	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\ \mathrm{R}\end{array}\right\}$	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** (MR × (M1 + M2))
16	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) N≥2

(b) M1≤M2

(c) M1+M2≤MR

(d) 2≤M1≤MCO1, 2≤M2≤MCO2

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
4000+i	LU 分解をする際に, i 段目の処理においてピボットが 0.0 となった.	
5000	固有値を求める段階で収束しなかった.	
6000	固有値が (誤差判定のための単位) より小さくなった.	

(6) **注意事項**
なし

9.4.2 D6CVSC, R6CVSC
正準変量の得点

(1) **機 能**

正準係数 (行列) をもとに, 各観測値の正準変量値 (得点) を求める. なお, n 個の対象について m_1 個の変数 x_j $(j = 1, 2, \cdots, m_1)$ に対する観測値 $x_{i,j}$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m_1)$ の正準変量値 z_i は次式で定義される.

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} p_i \frac{x_{i,j} - \overline{x_j}}{\sigma_j}$$

ここで, $\overline{x_j}$, σ_j^2 は観測値の平均および分散を, $\boldsymbol{p} = \{p_i\}$ は正準係数ベクトルをそれぞれ表す.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6CVSC (N, M1, M2, A, MA, CO1, MCO1, CO2, MCO2, X1, SD, Z, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6CVSC (N, M1, M2, A, MA, CO1, MCO1, CO2, MCO2, X1, SD, Z, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型 Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型 C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内容
1	N	I	1	入 力	観測値の数
2	M1	I	1	入 力	第 1 群の変量の数
3	M2	I	1	入 力	第 2 群の変量の数
4	A	{D/R}	内容参照	入 力	観測値行列 **大きさ:** (MA, (M1 + M2))
5	MA	I	1	入 力	配列 A, Z の整合寸法
6	CO1	{D/R}	MCO1, M1	入 力	第 1 群の正準係数行列
7	MCO1	I	1	入 力	配列 CO1 の整合寸法
8	CO2	{D/R}	MCO2, M1	入 力	第 2 群の正準係数行列
9	MCO2	I	1	入 力	配列 CO2 の整合寸法
10	X1	{D/R}	M1+M2	入 力	各変量ごとの平均
11	SD	{D/R}	M1+M2	入 力	各変量ごとの標準偏差
12	Z	{D/R}	内容参照	出 力	正準変量の値 **大きさ:** (MA, (2 × M1))
13	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) 2≤N≤MA

(b) 2≤M1≤MCO1, 2≤M2≤MCO2

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 正準変量の値は, 以下のような実行列 (2 次元配列型) として配列 Z に格納される. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,\mathrm{M1}} & v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,\mathrm{M1}} \\ u_{2,1} & \ddots & & \vdots & v_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_{\mathrm{N},1} & \cdots & \cdots & u_{\mathrm{N},\mathrm{M1}} & v_{\mathrm{N},1} & \cdots & \cdots & v_{\mathrm{N},\mathrm{M1}} \end{bmatrix}$$

ここで

$u_{k,i}$ $(i=1,2,\cdots,\mathrm{M1};k=1,2,\cdots,\mathrm{N})$:第 i 正準相関係数に対する第 1 群の正準変量

$v_{k,j}$ $(j=1,2,\cdots,\mathrm{M1};k=1,2,\cdots,\mathrm{N})$:第 j 正準相関係数に対する第 2 群の正準変量

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値行列

$$A = \begin{bmatrix} 90.0 & 91.0 & 95.0 & 103.0 & 75.0 \\ 97.0 & 98.0 & 98.0 & 92.0 & 76.0 \\ 93.0 & 92.0 & 97.0 & 106.0 & 77.0 \\ 99.0 & 90.0 & 99.0 & 108.0 & 78.0 \\ 102.0 & 97.0 & 101.0 & 105.0 & 79.0 \\ 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 80.0 \\ 103.0 & 99.0 & 103.0 & 103.0 & 81.0 \\ 106.0 & 98.0 & 101.0 & 101.0 & 82.0 \\ 111.0 & 90.0 & 99.0 & 104.0 & 83.0 \\ 108.0 & 98.0 & 103.0 & 102.0 & 84.0 \\ 104.0 & 97.0 & 105.0 & 99.0 & 85.0 \end{bmatrix}$$

から相関係数行列を求め, さらに正準相関係数, 正準変量等を求める.

(b) 入力データ

観測値行列 A, N=11, M1=2, M2=3, MR=5, MA=11, MCO1=3, MCO2=3

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B6CVSC
! *** EXAMPLE OF D6CVAN , D6CVSC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER (N=11,M1=2,M2=3,MR=5,MCO1=3,MCO2=3,MA=11)
```

```
      DIMENSION A(MA,M1+M2),R(MR,M1+M2)
      DIMENSION CO(M1),E(M1),WIL(M1),CHI(M1),NDF(M1)
      DIMENSION CO1(MCO1,M1),CO2(MCO2,M1),W1(MR,M1+M2)
      DIMENSION X1(M1+M2),SD(M1+M2),Z(MA,2*M1),STAT(M1+M2,5)
!
      M=M1+M2
      READ(5,*) ((A(I,J),I=1,N),J=1,M)
      WRITE(6,1000) N,M1,M2,MR,MA,MCO1,MCO2
      WRITE(6,3000)
      DO 10 I=1,N
        WRITE(6,3100) (A(I,J),J=1,M)
   10 CONTINUE
      CALL D2BAMS(A,MA,N,M,NS,STAT,0,IERR)
      DO 20 I=1,M
        X1(I)=STAT(I,2)
        SD(I)=STAT(I,5)
   20 CONTINUE
      CALL D2CCMT(A,MA,N,M,NS,X1,R,MR,0,W1,IERR)
      WRITE(6,3200) (X1(I),I=1,M)
      WRITE(6,3300) (SD(I),I=1,M)
      WRITE(6,3400)
      DO 30 I=1,M
        WRITE(6,3100) (R(I,J),J=1,M)
   30 CONTINUE
      CALL D6CVAN&
      (N,M1,M2,R,MR,CO,CO1,MCO1,CO2,MCO2,E,WIL,CHI,NDF,W1,IERR)
      WRITE(6,5000) IERR
      WRITE(6,4100)
      DO 40 I=1,M1
        WRITE(6,4200) CO(I),E(I),WIL(I),CHI(I),NDF(I)
   40 CONTINUE
      WRITE(6,4300)
      DO 50 J=1,M1
        WRITE(6,4700) (CO1(I,J),I=1,M1)
   50 CONTINUE
      WRITE(6,4400)
      DO 60 J=1,M1
        WRITE(6,4800) (CO2(I,J),I=1,M2)
   60 CONTINUE
!
      CALL D6CVSC(N,M1,M2,A,MA,CO1,MCO1,CO2,MCO2,X1,SD,Z,IERR)
      WRITE(6,5500) IERR
      WRITE(6,4500)
      DO 70 I=1,N
        WRITE(6,4700) (Z(I,J),J=1,M1)
   70 CONTINUE
      WRITE(6,4600)
      DO 80 I=1,N
        WRITE(6,4700) (Z(I,J),J=M1+1,2*M1)
   80 CONTINUE
!
      STOP
!
 1000 FORMAT('  *** D6CVAN , D6CVSC ***',/,/,'    ** INPUT DATA **',/,/,&
             7X,'N    = ',I4,5X,'M1   = ',I4,5X,'M2 =   ',I4,/,&
             7X,'MR   = ',I4,5X,'MA   = ',I4,/,&
             7X,'MCO1 = ',I4,5X,'MCO2 = ',I4)
 3000 FORMAT(' ',/,7X,'A(OBSERVATIONS MATRIX)')
 3100 FORMAT(7X,5(D12.4,3X))
 3200 FORMAT(' ',/,7X,'X1(MEAN OF VARIABLES)',&
             /,7X,5(D12.4,3X))
 3300 FORMAT(' ',/,7X,'SD(STANDARD DEVIATION)',&
             /,7X,5(D12.4,3X))
 3400 FORMAT(' ',/,7X,'R(CORRELATION MATRIX)')
 4100 FORMAT(13X,'CO',13X,'E',13X,'WIL',&
              12X,'CHI',8X,'NDF')
 4200 FORMAT(7X,3(D12.4,3X),D12.4,3X,I3)
 4300 FORMAT(' ',/,7X,'CO1(CANONICAL COEFFICIENT OF THE FIRST SET)')
 4400 FORMAT(' ',/,7X,'CO2(CANONICAL COEFFICIENT OF THE SECOND SET)')
 4500 FORMAT(' ',/,7X,'Z(CANONICAL SCORE OF THE FIRST SET)')
 4600 FORMAT(' ',/,7X,'Z(CANONICAL SCORE OF THE SECOND SET)')
 4700 FORMAT(7X,D12.4,3X,D12.4)
 4800 FORMAT(7X,2(D12.4,3X),D12.4)
 5000 FORMAT(' ',/,4X,'** OUTPUT **',/,/,5X,'* D6CVAN *',/,/,7X,'IERR = ',I4)
 5500 FORMAT(' ',/,5X,'* D6CVSC *',/,/,7X,'IERR = ',I4)
!
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D6CVAN , D6CVSC ***

   ** INPUT DATA **

      N    =   11     M1   =    2     M2 =      3
      MR   =    5     MA   =   11
      MCO1 =    3     MCO2 =    3

      A(OBSERVATIONS MATRIX)
        0.9000D+02     0.9100D+02     0.9500D+02     0.1030D+03     0.7500D+02
        0.9700D+02     0.9800D+02     0.9800D+02     0.9200D+02     0.7600D+02
        0.9300D+02     0.9200D+02     0.9700D+02     0.1060D+03     0.7700D+02
        0.9900D+02     0.9000D+02     0.9900D+02     0.1080D+03     0.7800D+02
        0.1020D+03     0.9700D+02     0.1010D+03     0.1050D+03     0.7900D+02
        0.1000D+03     0.1000D+03     0.1000D+03     0.1000D+03     0.8000D+02
        0.1030D+03     0.9900D+02     0.1030D+03     0.1030D+03     0.8100D+02
        0.1060D+03     0.9800D+02     0.1010D+03     0.1010D+03     0.8200D+02
        0.1110D+03     0.9000D+02     0.9900D+02     0.1040D+03     0.8300D+02
        0.1080D+03     0.9800D+02     0.1030D+03     0.1020D+03     0.8400D+02
        0.1040D+03     0.9700D+02     0.1050D+03     0.9900D+02     0.8500D+02
```

```
     X1(MEAN OF VARIABLES)
       0.1012D+03      0.9545D+02      0.1001D+03      0.1021D+03      0.8000D+02

     SD(STANDARD DEVIATION)
       0.6274D+01      0.3857D+01      0.2914D+01      0.4253D+01      0.3317D+01

     R(CORRELATION MATRIX)
       0.1000D+01      0.2566D+00      0.6937D+00     -0.8176D-02      0.8794D+00
       0.2566D+00      0.1000D+01      0.6100D+00     -0.5819D+00      0.3284D+00
       0.6937D+00      0.6100D+00      0.1000D+01     -0.1218D+00      0.8485D+00
      -0.8176D-02     -0.5819D+00     -0.1218D+00      0.1000D+01     -0.1418D-01
       0.8794D+00      0.3284D+00      0.8485D+00     -0.1418D-01      0.1000D+01

  ** OUTPUT **

   * D6CVAN *

     IERR =    0
           CO              E               WIL             CHI         NDF
       0.8913D+00      0.7944D+00      0.6687D-01      0.2164D+02      6
       0.8214D+00      0.6748D+00      0.3252D+00      0.8985D+01      2

     CO1(CANONICAL COEFFICIENT OF THE FIRST SET)
       0.8736D+00      0.3115D+00
      -0.5543D+00      0.9866D+00

     CO2(CANONICAL COEFFICIENT OF THE SECOND SET)
       0.1592D+00     -0.1801D+00      0.8392D+00
       0.1332D+01     -0.5502D+00     -0.1337D+01

   * D6CVSC *

     IERR =    0

     Z(CANONICAL SCORE OF THE FIRST SET)
      -0.1917D+01     -0.1517D+00
      -0.3767D+00      0.1021D+01
      -0.1418D+01     -0.1609D+00
      -0.7444D+00     -0.1203D+01
       0.2388D+00      0.3231D+00
       0.2026D+00      0.1267D+01
       0.5396D+00      0.7464D+00
       0.8765D+00      0.2255D+00
       0.9265D+00     -0.2263D+01
       0.1155D+01      0.4885D-01
       0.5173D+00      0.1464D+00

     Z(CANONICAL SCORE OF THE SECOND SET)
      -0.1582D+01     -0.4291D+00
      -0.6989D+00      0.1962D+01
      -0.1093D+01     -0.7092D+00
      -0.8159D+00     -0.4568D+00
      -0.3266D+00      0.4423D+00
       0.8359D-01      0.2289D+00
       0.3734D+00      0.8090D+00
       0.6019D+00     -0.2495D+00
       0.6186D+00     -0.1955D+01
       0.1175D+01     -0.2709D+00
       0.1664D+01      0.6282D+00
```

9.5 判別分析

9.5.1 D6DAFN, R6DAFN 判別関数

(1) **機 能**

各観測値の各母集団が m 次元正規母集団 $N(\boldsymbol{\nu_1},\Sigma),\cdots,N(\boldsymbol{\nu_k},\Sigma)$ に従い, 全群を通しての分散共分散行列 $\Sigma=(\sigma_{i,j})$:

$$\sigma_{i,j}=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{g}\sum_{l=1}^{n_k}(x_{l,i}^{(k)}-\overline{x}_{\cdot i}{}^{(k)})(x_{l,j}^{(k)}-\overline{x}_{\cdot j}{}^{(k)})}{\sum_{k=1}^{g}(n_k-1)}$$

第 k 群の各変量の平均ベクトル $\boldsymbol{\nu_k}=(\overline{x}_{\cdot i}^{(k)})$:

$$\overline{x}_{\cdot i}{}^{(k)}=\frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k}x_{l,i}^{(k)}$$

である g 群の観測値 $x_{l,i}{}^{(k)}$ $(l=1,2,\cdots,n_k;i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,g)$ が与えられている場合に, 次式で定義される $\boldsymbol{u}$ に関する線形判別関数の係数を求める.

$$y^{(p)}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\nu_k}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu_k}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu_k}\quad(p=1,2,\cdots,g)$$

また, 次式で定義される量 D^2 も求める.

$$D^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{i,j}{}^{-1}\sum_{l=1}^{g}n_k(\overline{x}_{\cdot i}{}^{(k)}-\overline{x}_{\cdot i})(\overline{x}_{\cdot j}{}^{(k)}-\overline{x}_{\cdot j})$$

ここで $\overline{x}_{\cdot i}$ は全群を通しての各変量の平均を表し, 次式で定義される.

$$\overline{x}_{\cdot i}=\sum_{k=1}^{g}\frac{n_k\overline{x}_{\cdot i}{}^{(k)}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{g}n_k}$$

なお, $\sigma_{i,j}{}^{-1}$ は Σ^{-1} の要素である. また, $u_i{}^{(l,k)}=x_{l,i}{}^{(k)}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ に関する判別関数の値 $y^{(p)}(\boldsymbol{u}^{(l,k)})$ の $p=1,2,\cdots,g$ に関する最大値 $y_{p_m}{}^{(l,k)}$ とそのときの p の値 $p_m{}^{(l,k)}$ を求め, 次式で定義される判別関数の最大確率を求める.

$$P^{(l,k)}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{g}\exp\left(y^{(k)}(\boldsymbol{u}^{(l,k)})-y_{p_m}{}^{(l,k)}\right)}\quad(l=1,2,\cdots,n_k;k=1,2,\cdots,g)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6DAFN (A, MA, M, N, K, X1, MX1, C, TM, DIST, CO, MCO, P, NUM, IW, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6DAFN (A, MA, M, N, K, X1, MX1, C, TM, DIST, CO, MCO, P, NUM, IW, W1, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	MA,M	入 力	観測値データ行列 $(x_{l,i}{}^{(k)})$(注意事項 (a) 参照)
2	MA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	M	I	1	入 力	変量の数 m
4	N	I	K	入 力	各群の観測値の数 (n_k)
5	K	I	1	入 力	群の数 g
6	X1	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	MX1,K	入 力	各群の変量の平均 $(\overline{x}_{\cdot i}^{(k)})$(注意事項 (a) 参照)
				出 力	判別関数の値 $y^{(g)}(\boldsymbol{u}^{(i,g)})$ (注意事項 (a) 参照)
7	MX1	I	1	入 力	配列 X1 の整合寸法
8	C	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	MX1,M	入 力	分散共分散行列 Σ^{-1}
9	TM	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	M	入 力	全群を通じての各変量の平均 $\overline{x}_{\cdot i}$
10	DIST	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	1	出 力	D^2 の値
11	CO	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	MCO,K	出 力	判別関数の係数 $\boldsymbol{\nu_k}^T\Sigma^{-1}$ および $-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu_k}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu_k}$ (注意事項 (a) 参照)
12	MCO	I	1	入 力	配列 CO の整合寸法
13	P	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	内容参照	出 力	全群を通じて, 各サンプルの最大判別関数と結び付いた確率 $P^{(l,k)}$ $(l=1,2,\cdots,n_k;k=1,2,\cdots,g)$ (注意事項 (a) 参照) **大きさ:** $\mathrm{N(1)}+\cdots+\mathrm{N(K)}$
14	NUM	I	内容参照	出 力	最も大きい確率を持つ判別関数の番号 $p_m{}^{(l,k)}$ $(l=1,2,\cdots,n_k;k=1,2,\cdots,g)$ (注意事項 (a) 参照) **大きさ:** $\mathrm{N(1)}+\cdots+\mathrm{N(K)}$
15	IW	I	M	ワーク	作業領域
16	W1	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\ \text{R}\end{array}\right\}$	M+2	ワーク	作業領域
17	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $1 \leq \mathrm{M} \leq \mathrm{MX1}$

(b) $\mathrm{K} \geq 2$

(c) $\mathrm{N(i)} \geq 2 \quad (\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{K})$

(d) $\mathrm{N(1)}+\cdots+\mathrm{N(K)} \leq \mathrm{MA}$

(e) $\mathrm{MCO} \geq \mathrm{M}+1$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (e) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 変量がそれぞれ m 個, 各変量の観測値がそれぞれ n_k $(k = 1, 2, \cdots, g)$ 個である g 個の群を考え, 各観測値が ${x_{l,i}}^{(k)}$ $(l = 1, 2, \cdots, n_k; i = 1, 2, \cdots, m; k = 1, 2, \cdots, g)$ で与えられている場合に, 観測値データは以下の様な実行列 (2 次元配列型) として配列 A に格納する.

$$\begin{bmatrix} {x_{1,1}}^{(1)} & {x_{1,2}}^{(1)} & \cdots & {x_{1,m}}^{(1)} \\ {x_{2,1}}^{(1)} & {x_{2,2}}^{(1)} & \cdots & {x_{2,m}}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_{n_1,1}}^{(1)} & {x_{n_1,2}}^{(1)} & \cdots & {x_{n_1,m}}^{(1)} \\ {x_{1,1}}^{(2)} & {x_{1,2}}^{(2)} & \cdots & {x_{1,m}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_{n_2,1}}^{(2)} & {x_{n_2,2}}^{(2)} & \cdots & {x_{n_2,m}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_{1,1}}^{(g)} & {x_{1,2}}^{(g)} & \cdots & {x_{1,m}}^{(g)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_{n_g,1}}^{(g)} & {x_{n_g,2}}^{(g)} & \cdots & {x_{n_g,m}}^{(g)} \end{bmatrix}$$

各群の各変量の平均は以下のように定義される実行列 (2 次元配列型)$E = (e_{i,k})$ $(i = 1, 2, \cdots, m; k = 1, 2, \cdots, g)$ として配列 X1 に格納する.

$$e_{i,k} = \overline{x}_{\cdot i}^{(k)}$$

なお, 出力時には行列 E の第 1 行に対応するデータは判別関数の値 $y^{(p)}(\boldsymbol{u}^{(n_g,g)})$ $(p = 1, 2, \cdots, g)$ の値で置き換えられる.

また, 判別関数の係数は以下のように定義される実行列 (2 次元配列型) $C = (c_{i,k})$ $(i = 1, 2, \cdots, m+1; k = 1, 2, \cdots, g)$ として配列 CO に格納される.

$$c_{i,k} = ({\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{k}}}^T \Sigma^{-1})_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$c_{m+1,k} = (-\frac{1}{2}{\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{k}}}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{k}})$$

このサブルーチンで使用する配列 C と X1 の入力データは配列 A からサブルーチン 4.3.2 $\begin{Bmatrix} \text{D2VCGR} \\ \text{R2VCGR} \end{Bmatrix}$ を用いて生成できる.

9.5.2 D6DASC, R6DASC
判別関数の得点

(1) **機 能**

g 群で各群の m 変量からなる観測値の数が n_k $(k=1,2,\cdots,g)$ であり, 各観測値の各母集団が m 次元正規母集団 $N(\boldsymbol{\nu_1},\Sigma),\cdots,N(\boldsymbol{\nu_k},\Sigma)$ に従い, 全群を通しての分散共分散行列が Σ の時次式で定義される m 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ に関する線形判別関数

$$y^{(p)}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\nu_k}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu_k}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu_k}\quad(p=1,2,\cdots,g;k=1,2,\cdots,g)$$

の係数 $C=(c_{i,k})$ $(i=1,2,\cdots,m+1;k=1,2,\cdots,g)$

$$c_{i,k}=(\boldsymbol{\nu_k}^T\Sigma^{-1})_i\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

$$c_{m+1,k}=(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu_k}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu_k})$$

と g 群の観測値 $x_{l,i}{}^{(k)}$ $(l=1,2,\cdots,n_k;i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,g)$ を与えて各観測値 $u_i{}^{(l,k)}=x_{l,i}{}^{(k)}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ に対応する判別関数の値 (判別得点) $z_{l,i}{}^{(p)}=y^{(p)}(\boldsymbol{u}^{(l,k)})$ $(p=1,2,\cdots,g)$ を求める.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6DASC (A, MA, M, N, K, CO, MCO, Z, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6DASC (A, MA, M, N, K, CO, MCO, Z, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	MA,M	入 力	$(x_{l,i}{}^{(k)})$(注意事項 (a) 参照)
2	MA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	M	I	1	入 力	変量の数 m
4	N	I	K	入 力	各群の観測値の数 (n_k)
5	K	I	1	入 力	群の数 g
6	CO	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	MCO,K	入 力	判別関数の係数 $c_{i,k}$(注意事項 (a) 参照)
7	MCO	I	1	入 力	配列 CO の整合寸法
8	Z	$\left\{\begin{matrix}D\\R\end{matrix}\right\}$	MA,K	出 力	判別関数の得点 $y^{(p)}(\boldsymbol{u}^{(l,k)})$
9	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $2 \leq \mathrm{M}+1 \leq \mathrm{MCO}$

(b) $\mathrm{K} \geq 2$

(c) $\mathrm{N(i)} \geq 2 \quad (\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{K})$

(d) $\mathrm{N(1)}+\cdots+\mathrm{N(K)} \leq \mathrm{MA}$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 変量がそれぞれ m 個, 各変量の観測値がそれぞれ n_k $(k=1,2,\cdots,g)$ 個である g 個の群を考え, 各観測値が ${x_{l,i}}^{(k)}$ $(l=1,2,\cdots,n_k; i=1,2,\cdots,m; k=1,2,\cdots,g)$ で与えられている場合に, 観測値データは以下の様な実行列 (2 次元配列型) として配列 A に格納する.

$$\begin{bmatrix} {x_{1,1}}^{(1)} & {x_{1,2}}^{(1)} & \cdots & {x_{1,m}}^{(1)} \\ {x_{2,1}}^{(1)} & {x_{2,2}}^{(1)} & \cdots & {x_{2,m}}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_{n_1,1}}^{(1)} & {x_{n_1,2}}^{(1)} & \cdots & {x_{n_1,m}}^{(1)} \\ {x_{1,1}}^{(2)} & {x_{1,2}}^{(2)} & \cdots & {x_{1,m}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_{n_2,1}}^{(2)} & {x_{n_2,2}}^{(2)} & \cdots & {x_{n_2,m}}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_{1,1}}^{(g)} & {x_{1,2}}^{(g)} & \cdots & {x_{1,m}}^{(g)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {x_{n_g,1}}^{(g)} & {x_{n_g,2}}^{(g)} & \cdots & {x_{n_g,m}}^{(g)} \end{bmatrix}$$

また, 判別関数の係数は以下のように定義される実行列 (2 次元配列型) $C=(c_{i,k})$ $(i=1,2,\cdots,m+1; k=1,2,\cdots,g)$ として配列 CO に格納する.

$$c_{i,k} = ({\boldsymbol{\nu_k}}^T\Sigma^{-1})_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$c_{m+1,k} = (-\frac{1}{2}{\boldsymbol{\nu_k}}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\nu_k})$$

各観測値 ${u_i}^{(l,k)} = {x_{l,i}}^{(k)}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ に対応する判別関数の値 (判別得点) ${z_{l,i}}^{(p)} = y^{(p)}(\boldsymbol{u}^{(l,k)})$ $(p=$

$1, 2, \cdots, g)$ は以下のように定義される実行列 (2 次元配列型) として配列 Z に格納される.

$$\begin{bmatrix} {z_{1,1}}^{(1)} & {z_{1,1}}^{(2)} & \cdots & {z_{1,1}}^{(g)} \\ {z_{2,1}}^{(1)} & {z_{2,1}}^{(2)} & \cdots & {z_{2,1}}^{(g)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {z_{n_1,1}}^{(1)} & {z_{n_1,1}}^{(2)} & \cdots & {z_{n_1,1}}^{(g)} \\ {z_{1,2}}^{(1)} & {z_{1,2}}^{(2)} & \cdots & {z_{1,2}}^{(g)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {z_{n_2,2}}^{(1)} & {z_{n_2,2}}^{(2)} & \cdots & {z_{n_2,2}}^{(g)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {z_{1,g}}^{(1)} & {z_{1,g}}^{(2)} & \cdots & {z_{1,g}}^{(g)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {z_{n_g,g}}^{(1)} & {z_{n_g,g}}^{(2)} & \cdots & {z_{n_g,g}}^{(g)} \end{bmatrix}$$

(格納形式については付録 A.2.1 を参照)

(7) **使用例**

(a) 問 題

3 個の群からなる観測値データを読み込み, 分散共分散行列を求める. この分散共分散行列をもとに, マハラノビスの汎距離 (D^2), 判別関数, 判別のための基準値および判別得点を求める.

(b) 入力データ

観測値データ行列

$$A = \begin{bmatrix} 10.0 & 3.0 & 7.0 \\ 11.0 & 5.0 & 8.0 \\ 12.0 & 7.0 & 6.0 \\ 14.0 & 4.0 & 9.0 \\ 17.0 & 12.0 & 8.0 \\ 18.0 & 11.0 & 6.0 \\ 18.0 & 13.0 & 7.0 \\ 11.0 & 4.0 & 11.0 \\ 12.0 & 6.0 & 12.0 \\ 13.0 & 8.0 & 10.0 \\ 15.0 & 5.0 & 6.0 \\ 18.0 & 10.0 & 13.0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{N}(1) = 4$

$\mathrm{N}(2) = 3$

$\mathrm{N}(3) = 5$

$\mathrm{K} = 3, \mathrm{M} = 3, \mathrm{MA} = 12$

$\mathrm{MX1} = 3, \mathrm{MCO} = 4$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B6DASC
! *** EXAMPLE OF D6DAFN,D6DASC ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
!
      PARAMETER(NA=12,LM=3,MX1=LM,LK=3,MCO=LM+1)
!
      DIMENSION A(NA,LM),X1(MX1,LK),TM(LM)
```

```
      DIMENSION NUM(NA),N(LK),IW(LM)
      DIMENSION C(MX1,LM),CO(MCO,LK),P(NA),Z(NA,LK),W1(LM+2)
      DIMENSION NS(LK),WK(LM*LM*LK+LM)
!
      WRITE(6,1000)
!
      READ(5,*) MA,M,K
      READ(5,*) ((A(I,J),J=1,M),I=1,MA)
      READ(5,*) (N(I),I=1,K)
!
      WRITE(6,2000) MA,M,K
      DO 10 I=1,K
        WRITE(6,2010) I,N(I)
   10 CONTINUE
!
      WRITE(6,2020)
      NT=0
      DO 30 I=1,K
        NT=NT+N(I)
        WRITE(6,2030) I,(J,J=1,M)
        DO 20 L=1,N(I)
          WRITE(6,2040) NT-N(I)+L,(A(NT-N(I)+L,J),J=1,M)
   20   CONTINUE
   30 CONTINUE
!
      ISW=0
!
      CALL D2VCGR(A,NA,M,N,K,NS,TM,X1,MX1,C,MX1,ISW,WK,IERR)
!
      WRITE(6,3000) IERR
      DO 40 J=1,K
        WRITE(6,3010) J,(I,I=1,M)
        WRITE(6,3020) (X1(I,J),I=1,M)
   40 CONTINUE
!
      WRITE(6,3030)
      WRITE(6,3040) (I,TM(I),I=1,M)
!
      WRITE(6,3050)
      DO 50 I=1,M
        WRITE(6,3060) (C(I,J),J=1,M)
   50 CONTINUE
!
      CALL D6DAFN(A,NA,M,N,K,X1,MX1,C,TM,DIST,CO,MCO,P,NUM,&
                  IW,W1,IERR)
!
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,4010) DIST
      WRITE(6,4020)
      DO 60 I=1,M
        WRITE(6,4030) I,(CO(I,J),J=1,K)
   60 CONTINUE
      WRITE(6,4040) (CO(M+1,J),J=1,K)
!
      WRITE(6,4050)
      L1=1
      L2=N(1)
      DO 80 I=1,K
        WRITE(6,4060) I
        DO 70 J=L1,L2
          WRITE(6,4070) J,P(J),NUM(J)
   70   CONTINUE
        IF(I-K.LT.0) THEN
          L1=L1+N(I)
          L2=L2+N(I+1)
        END IF
   80 CONTINUE
!
      CALL D6DASC(A,MA,M,N,K,CO,MCO,Z,IERR)
      WRITE(6,5000) IERR
      WRITE(6,5010) (J,J=1,K)
      DO 90 I=1,NT
        WRITE(6,5020) I,(Z(I,J),J=1,K)
   90 CONTINUE
!
      STOP
 1000 FORMAT(' *** D2VCGR, D6DAFN, D6DASC ***',/)
 2000 FORMAT(' ** INPUT **',/,/,&
            '      MA=',I2,',  M =',I2,',  K =',I2,/)
 2010 FORMAT('      N(',I1,')=',I2)
 2020 FORMAT(' ',/,'      *OBSERVATION DATA*')
 2030 FORMAT(' ',/,'      (GROUP',I2,')',/,&
            12X,10I6)
 2040 FORMAT(8X,I2,3X,10F6.1)
 3000 FORMAT(' ',/,' ** OUTPUT(D2VCGR) **',/,/,&
            '      IERR = ',I4,/,/,&
            '      *MEAN OF VARIABLES (EACH GROUP)*')
 3010 FORMAT(' ',/,'      (GROUP',I2,')',/,&
            10X,7I8)
 3020 FORMAT(12X,7F8.2)
 3030 FORMAT(' ',/,'      *TOTAL MEAN OF VARIABLES*')
 3040 FORMAT(9X,'TM(',I2,') =',F9.4)
 3050 FORMAT(' ',/,'      *VARIANCE COVARIANCE MATRIX*')
 3060 FORMAT(6X,7F9.4)
 4000 FORMAT(' ',/,' ** OUTPUT(D6DAFN) **',/,/,&
            '      IERR = ',I4)
 4010 FORMAT(' ',/,'      *MAHARANOBIS DISTANCE*',/,&
            9X,'DIST =',F9.4)
 4020 FORMAT(' ',/,'      *DISCRIMINANT COEFFICIENT*')
 4030 FORMAT(15X,I2,7F9.4)
 4040 FORMAT('          CONSTANT',7F9.4)
```

```
 4050 FORMAT(' ',/,'     *EVALUATION OF CLASSIFICATION*')
 4060 FORMAT(' ',/,'     (GROUP',I2,')',/,&
            12X,' MAXIMUM PROBABILITY    MAXIMUM FUNCTION NO.')
 4070 FORMAT(8X,I2,5X,F13.5,14X,I3)
 5000 FORMAT(' ',/,' ** OUTPUT(D6DASC) **',/,/,&
            '      IERR = ',I4)
 5010 FORMAT(' ',/,'     *DISCRIMINANT SCORE*',/,&
            21X,'(  GROUP  )',/,&
            8X,7I10)
 5020 FORMAT(8X,I2,7F10.4)
      END
```

(d) 出力結果

```
*** D2VCGR, D6DAFN, D6DASC ***

 ** INPUT **

    MA=12,  M = 3,  K = 3

    N(1)= 4
    N(2)= 3
    N(3)= 5

    *OBSERVATION DATA*

    (GROUP 1)
                1     2     3
        1     10.0   3.0   7.0
        2     11.0   5.0   8.0
        3     12.0   7.0   6.0
        4     14.0   4.0   9.0

    (GROUP 2)
                1     2     3
        5     17.0  12.0   8.0
        6     18.0  11.0   6.0
        7     18.0  13.0   7.0

    (GROUP 3)
                1     2     3
        8     11.0   4.0  11.0
        9     12.0   6.0  12.0
       10     13.0   8.0  10.0
       11     15.0   5.0   6.0
       12     18.0  10.0  13.0

** OUTPUT(D2VCGR) **

    IERR =    0

    *MEAN OF VARIABLES (EACH GROUP)*

    (GROUP 1)
                1       2       3
              11.75    4.75    7.50

    (GROUP 2)
                1       2       3
              17.67   12.00    7.00

    (GROUP 3)
                1       2       3
              13.80    6.60   10.40

    *TOTAL MEAN OF VARIABLES*
        TM( 1) =  14.0833
        TM( 2) =   7.3333
        TM( 3) =   8.5833

    *VARIANCE COVARIANCE MATRIX*
        4.4685   2.3722   0.4333
        2.3722   3.7722   1.1444
        0.4333   1.1444   4.0222

** OUTPUT(D6DAFN) **

    IERR =    0

    *MAHARANOBIS DISTANCE*
        DIST =  39.2991

    *DISCRIMINANT COEFFICIENT*
               1   3.1259   3.5141   3.4876
               2  -1.2806   0.6108  -1.2193
               3   1.8923   1.1879   2.5568
        CONSTANT -22.4189 -38.8641 -33.3364

    *EVALUATION OF CLASSIFICATION*

    (GROUP 1)
            MAXIMUM PROBABILITY    MAXIMUM FUNCTION NO.
        1           0.92156                1
        2           0.78818                1
        3           0.84896                1
        4           0.59235                3

    (GROUP 2)
            MAXIMUM PROBABILITY    MAXIMUM FUNCTION NO.
        5           0.99663                2
```

```
         6          0.99816                 2
         7          0.99986                 2

    (GROUP 3)
           MAXIMUM PROBABILITY    MAXIMUM FUNCTION NO.
         8          0.64966                 3
         9          0.85401                 3
        10          0.70803                 3
        11          0.76530                 1
        12          0.98186                 3

 ** OUTPUT(D6DASC) **

    IERR =    0

    *DISCRIMINANT SCORE*
                    (   GROUP  )
               1          2          3
         1   18.2436     6.4250   15.7798
         2   20.7005    12.3488   19.3856
         3   17.4806    14.7087   15.3209
         4   33.2509    23.4682   33.6247
         5   30.4912    37.7093   31.7761
         6   31.1132    38.2367   31.3694
         7   30.4442    40.6463   31.4875
         8   27.6578    15.3017   28.2754
         9   30.1147    21.2255   31.8812
        10   26.8948    23.5854   27.8165
        11   29.4194    24.0293   28.2225
        12   45.6396    45.9414   50.4865
```

9.6 クラスタ分析

9.6.1 D6CLDS, R6CLDS 非類似度

(1) **機 能**

(個体)×(変量) の多変量特性値データ行列 (a_{ik}) または (a_{ki}) $(i = 1, 2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, p)$ が与えられて, n 個の特性を持つ個体または変量を分類対象としたい場合に, 以下に述べる測度を用いて i 番目と j 番目の個体または変量間の非類似度 d_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を求める.

- ユークリッド平方距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} - a_{jk})^2 \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

- 標準化ユークリッド平方距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \frac{(a_{ik} - a_{jk})^2}{s_k^2} \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

ただし, s_k^2 は変量の分散で次式により定義する.

$$s_k^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^{n} (a_{lk} - \bar{a_k})^2 \quad (\bar{a_k} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} a_{lk})$$

これは 各変量の分散を 1 に標準化しておいて, ユークリッド平方距離を求めることと同じである.

- マハラノビスの汎距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{p} (a_{ik} - a_{jk}) v_{km} (a_{im} - a_{jm}) \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

ただし, v_{km} は, 個体または変量の分散共分散行列の逆行列の (k, m) 要素である.

- ミンコフスキー距離

$$d_{ij} = \{\sum_{k=1}^{p} \mid a_{ik} - a_{jk} \mid^r\}^{1/r} \quad (r \geq 1.0; i, j = 1, \cdots, n)$$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6CLDS (A, LX, LY, NX, NY, ML, DISS, ISW, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6CLDS (A, LX, LY, NX, NY, ML, DISS, ISW, W1, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{\begin{array}{l}\text{32 ビット整数版では INTEGER(4)}\\\text{64 ビット整数版では INTEGER(8)}\end{array}\right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{array}\right\}$	LX,LY	入 力	観測値データ a_{ik} または a_{ki} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 1, 2, \cdots, p)$ (注意事項 (a) 参照)
2	LX	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	LY	I	1	入 力	配列 A の第 2 寸法
4	NX	I	1	入 力	観測値データ行列の行数 (n または p)
5	NY	I	1	入 力	観測値データ行列の列数 (p または n)
6	ML	I	1	入 力	MAX(LX, LY)
7	DISS	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{array}\right\}$	内容参照	入 力	ISW=14, 24(ミンコフスキー距離) のとき, DISS (1, 1) に, $r(r \geq 1.0)$ の値を入力する. それ以外の場合には設定不要. **大きさ:** NX=n のとき, (ML,NX) NY=n のとき, (ML,NY)
				出 力	非類似度行列 (実対称行列)
8	ISW	I	1	入 力	非類似度の計算処理スイッチ ISW=11:ユークリッド平方距離 ISW=12:標準化ユークリッド平方距離 ISW=13:マハラノビスの (汎) 距離 ISW=14:ミンコフスキー距離 ただし, ISW=1x については NX=n ISW=21:ユークリッド平方距離 ISW=22:標準化ユークリッド平方距離 ISW=23:マハラノビスの (汎) 距離 ISW=24:ミンコフスキー距離 ただし, ISW=2x については NY=n
9	W1	$\left\{\begin{array}{c}\mathrm{D}\\\mathrm{R}\end{array}\right\}$	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** NX=n のとき, NY $\times$ (ML + 1) + 2 NY=n のとき, NX $\times$ (ML + 1) + 2
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $1 < \mathrm{NX} \leq \mathrm{LX}, 1 < \mathrm{NY} \leq \mathrm{LY}$

(b) $\mathrm{ML} = \mathrm{MAX(LX, LY)}$

(c) $\mathrm{ISW} \in \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24\}$

(d) ISW = 14 または 24 のとき, $\mathrm{DISS}(1, 1) \geq 1.0$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	
4000	入力した観測値データでは, マハラノビスの (汎) 距離による計算はできない. (9.1.1 参照)	

(6) **注意事項**

(a) 観測値データの対象の単位がそれぞれ異なり, 非類似度の計算にユークリッド平方距離, ミンコフスキー距離を用いる場合, 対象間の適切な位置関係が反映されるように, あらかじめデータを標準化しておくことが望ましい (例題参照).

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値データ行列

$$A = \begin{bmatrix} 0.321 & 119 & 6 & 40 & 6 & 6 & 12 & 29 \\ 0.301 & 112 & 9 & 38 & 4 & 2 & 3 & 31 \\ 0.288 & 133 & 15 & 53 & 4 & 5 & 12 & 30 \\ 0.280 & 112 & 9 & 47 & 4 & 2 & 10 & 24 \\ 0.261 & 109 & 3 & 21 & 1 & 3 & 13 & 21 \\ 0.256 & 107 & 8 & 34 & 4 & 2 & 17 & 38 \\ 0.253 & 95 & 16 & 57 & 4 & 6 & 7 & 37 \\ 0.250 & 100 & 13 & 46 & 4 & 3 & 13 & 37 \\ 0.249 & 92 & 17 & 48 & 6 & 2 & 7 & 23 \\ 0.227 & 88 & 12 & 45 & 4 & 0 & 3 & 33 \end{bmatrix}$$

を標準化し, 行数を対象の数として, ユークリッド平方距離を用い, 非類似度行列を求める.

(b) 入力データ

観測値データ行列 A, $\mathrm{LX} = 11, \mathrm{LY} = 9, \mathrm{NX} = 10, \mathrm{NY} = 8, \mathrm{ML} = 11, \mathrm{ISW} = 11$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B6CLDS
! *** EXAMPLE OF D6CLDS ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER(LX=11,LY=9,NX=10,NY=8,ML=11,ISW=11)
      DIMENSION A(LX,LY),DISS(ML,NX),W1(NY*(ML+1)+2),AV(NY),C(NY)
!
      READ(5,*) ((A(I,J),J=1,8),I=1,10)
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1010) 'A','B','C','D','E','F','G','H'
      DO 10 I=1,NX
        WRITE(6,1020) I,(A(I,J),J=1,NY)
   10 CONTINUE
!
! *** NORMALIZATION OF DATA ***
      DO 11 J=1,NY
        SUM = 0.0D0
        DO 12 I=1,NX
          SUM = SUM + A(I,J)
   12   CONTINUE
        AV(J) = SUM/DBLE(NX)
   11 CONTINUE
```

```
      DO 40 I=1,NY
        SUM = 0.0D0
        DO 41 J=1,NX
          SUM = SUM + (A(J,I)-AV(I))**2
   41   CONTINUE
        C(I) = SUM/(NX-1.0D0)
   40 CONTINUE
      DO 20 I=1,NX
        DO 21 J=1,NY
          A(I,J) = (A(I,J)-AV(J))/SQRT(C(J))
   21   CONTINUE
   20 CONTINUE
!
! *** *** *** *** *** *** *** *** *** ***
!
      WRITE(6,1030) ISW,LX,LY,NX,NY,ML
      CALL D6CLDS(A,LX,LY,NX,NY,ML,DISS,ISW,W1,IERR)
      WRITE(6,2000) IERR
      WRITE(6,2010) (I,I=1,NX)
      DO 30 I=1,NX
        WRITE(6,2020) I,(DISS(I,J),J=1,NX)
   30 CONTINUE
!
      STOP
!
 1000 FORMAT('  *** D6CLDS ***',/,/,3X,'** INPUT **',/)
 1010 FORMAT('    I',8(4X,A,3X),/,2X,'--+',64('-'))
 1020 FORMAT(' ',I3,'I',8F8.3)
 1030 FORMAT(' ',/,3X,'ISW =',I4,/,3X,' LX =',I4,5X,' LY =',I4,/,3X,&
             ' NX =',I4,5X,' NY =',I4,5X,' ML =',I4,/,/)
 2000 FORMAT('    ** OUTPUT **',/,/,' IERR = ',I4,/)
 2010 FORMAT('    I',10(2X,I2,3X),/,2X,'--+',70('-'))
 2020 FORMAT(' ',I3,'I',10F7.3)
!
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D6CLDS ***

  ** INPUT **

   I    A       B       C       D       E       F       G       H
 --+----------------------------------------------------------------
  1I   0.321 119.000   6.000  40.000   6.000   6.000  12.000  29.000
  2I   0.301 112.000   9.000  38.000   4.000   2.000   3.000  31.000
  3I   0.288 133.000  15.000  53.000   4.000   5.000  12.000  30.000
  4I   0.280 112.000   9.000  47.000   4.000   2.000  10.000  24.000
  5I   0.261 109.000   3.000  21.000   1.000   3.000  13.000  21.000
  6I   0.256 107.000   8.000  34.000   4.000   2.000  17.000  38.000
  7I   0.253  95.000  16.000  57.000   4.000   6.000   7.000  37.000
  8I   0.250 100.000  13.000  46.000   4.000   3.000  13.000  37.000
  9I   0.249  92.000  17.000  48.000   6.000   2.000   7.000  23.000
 10I   0.227  88.000  12.000  45.000   4.000   0.000   3.000  33.000

  ISW =   11
   LX =   11      LY =    9
   NX =   10      NY =    8      ML =   11


   ** OUTPUT **

IERR =     0

   I   1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
 --+----------------------------------------------------------------------
  1I  0.000 11.433 10.328 10.369 26.272 16.179 21.456 17.143 23.111 33.885
  2I 11.433  0.000 12.656  4.942 18.958 13.443 16.062 11.351 14.159 11.996
  3I 10.328 12.656  0.000  8.019 28.695 15.941 12.338 10.772 18.421 27.228
  4I 10.369  4.942  8.019  0.000 14.354 10.042 14.833  7.866  9.039 12.615
  5I 26.272 18.958 28.695 14.354  0.000 16.356 37.180 22.925 33.453 28.873
  6I 16.179 13.443 15.941 10.042 16.356  0.000 17.770  3.919 19.886 15.906
  7I 21.456 16.062 12.338 14.833 37.180 17.770  0.000  5.752 12.359 13.710
  8I 17.143 11.351 10.772  7.866 22.925  3.919  5.752  0.000 10.465  8.982
  9I 23.111 14.159 18.421  9.039 33.453 19.886 12.359 10.465  0.000  8.556
 10I 33.885 11.996 27.228 12.615 28.873 15.906 13.710  8.982  8.556  0.000
```

9.6.2 D6CLAN, R6CLAN クラスタ分析 (非類似度 ・ 類似度行列入力)

(1) **機 能**

非類似度 d_{ij} または類似度 $1.0 - d_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を与えてこれをもとにクラスタ分析を行う. なお, クラスタ p とクラスタ q を融合して新しくクラスタ t をつくった場合, クラスタ t と別の任意のクラスタ r との間の非類似度 d_{tr} の定義として以下の測度を用いる. ただし, n_p はクラスタ p の中に含まれる対象の数を表す.

- 最短距離法

$$d_{tr} = \min(d_{pr}, d_{qr})$$

- 最長距離法

$$d_{tr} = \max(d_{pr}, d_{qr})$$

- 群平均法

$$d_{tr} = \frac{n_p d_{pr} + n_q d_{qr}}{n_p + n_q}$$

- 重心法

$$d_{tr} = \frac{n_p}{n_p + n_q} d_{pr} + \frac{n_q}{n_p + n_q} d_{qr} - \frac{n_p n_q}{(n_p + n_q)^2} d_{pq}$$

- メジアン法

$$d_{tr} = \frac{1}{2} d_{pr} + \frac{1}{2} d_{qr} - \frac{1}{4} d_{pq}$$

- ウォード法

$$d_{tr} = \frac{n_p + n_r}{n_t + n_r} d_{pr} + \frac{n_q + n_r}{n_t + n_r} d_{qr} - \frac{n_r}{n_t + n_r} d_{pq}$$

- 可変法

$$d_{tr} = \frac{1 - \beta}{2} d_{pr} + \frac{1 - \beta}{2} d_{qr} + \beta d_{pq} \qquad (-\frac{1}{4} \leq \beta \leq 0)$$

ただし, 重心法, メジアン法, ウォード法は非類似度が (標準化) ユークリッド平方距離で与えられることを前提としている.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6CLAN (A, LNA, NC, IPOS, LNP, DIS, ISW1, ISW2, IW, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6CLAN (A, LNA, NC, IPOS, LNP, DIS, ISW1, ISW2, IW, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	A	{D/R}	LNA,NC	入 力	非類似度・類似度行列 (実対称行列)(2 次元配列型, 上三角型) (注意事項 (a) 参照)
				出 力	入力時の内容は保存されない.
2	LNA	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	NC	I	1	入 力	配列 A の第 2 寸法
4	IPOS	I	LNP, 2	出 力	クラスタの融合を示す情報 (注意事項 (b) 参照) i 回目に, IPOS(i, 1) 番目と IPOS(i, 2) 番目のクラスタが融合したことを示す. $(i = 1, \cdots, NC - 1)$
5	LNP	I	1	入 力	配列 IPOS の整合寸法
6	DIS	{D/R}	NC − 1	入 力	ISW2 =7 のときは DIS (1) に $\beta(-1/4 \leq \beta \leq 0)$(既定値:$\beta = -1/4$) を入力する. それ以外の時は設定不要.
				出 力	クラスタ融合距離情報 (注意事項 (c) 参照) i 回目に, 距離 DIS(i) でクラスタが融合したことを示す. $(i = 1, \cdots, NC - 1)$
7	ISW1	I	1	入 力	処理スイッチ (注意事項 (c) 参照) ISW1=1:配列 A に非類似度行列を与えたとき ISW1=2:配列 A に類似度行列を与えたとき
8	ISW2	I	1	入 力	分析法の選択スイッチ ISW2=1:最短距離法 ISW2=2:最長距離法 ISW2=3:群平均法 ISW2=4:重心法 ISW2=5:メジアン法 ISW2=6:ウォード法 ISW2=7:可変法 (β を入力)
9	IW	I	NC	ワーク	作業領域
10	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $1 < NC \leq LNA$

(b) LNP≥NC−1

(c) ISW1=1 または ISW1=2

(d) $1 \leq ISW2 \leq 7$

(e) ISW2 = 7 の場合, $-1/4 \leq$ DIS (1) ≤ 0
(既定値にするため, 1.0 を入力する場合は除く)

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (e) を満足しなかった.	既定値にセットして処理する.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (d) を満足しなかった.	

(6) 注意事項

(a) 配列 A に与える行列は実対称行列でなければならない. このサブルーチンでは行列の上三角部分のみを用いて処理を行う. (格納形式については付録 A.2.2 を参照)

(b) 配列 IPOS には, 何回目の融合でどのクラスタとどのクラスタが融合したかの情報が格納される. ただし, 融合してできたクラスタに対しては, 融合前の 2 つのクラスタの番号のうち若い方を付けている. 例えば, クラスタ 3 とクラスタ 5 が融合してできたクラスタには, 3 と名付ける.

(c) 配列 A に与える行列 (a_{ij}) が類似度行列である場合は, サブルーチンの内部で式

$$a_{ij} = 1.0 - a_{ij}$$

により, 非類似度行列に変換してから分析を行う. よって, この場合 DIS(i)$(\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{NC} - 1)$ には, 上式による変換後の値を用いて計算された距離が格納される.

(7) 使用例

(a) 問 題
非類似度行列

$$A = \begin{bmatrix} 0.000 & 11.432 & 10.328 & 10.369 & 26.271 & 16.179 & 21.455 & 17.142 & 23.111 & 33.883 \\ 11.432 & 0.000 & 12.656 & 4.942 & 18.957 & 13.443 & 16.062 & 11.350 & 14.159 & 11.996 \\ 10.328 & 12.656 & 0.000 & 8.019 & 28.694 & 15.942 & 12.338 & 10.771 & 18.421 & 27.228 \\ 10.369 & 4.942 & 8.019 & 0.000 & 14.353 & 10.042 & 14.833 & 7.866 & 9.040 & 12.615 \\ 26.271 & 18.957 & 28.694 & 14.353 & 0.000 & 16.356 & 37.180 & 22.924 & 33.453 & 28.872 \\ 16.179 & 13.443 & 15.942 & 10.042 & 16.356 & 0.000 & 17.771 & 3.919 & 19.886 & 15.906 \\ 21.455 & 16.062 & 12.338 & 14.833 & 37.180 & 17.771 & 0.000 & 5.752 & 12.359 & 13.710 \\ 17.142 & 11.350 & 10.771 & 7.866 & 22.924 & 3.919 & 5.752 & 0.000 & 10.465 & 8.982 \\ 23.111 & 14.159 & 18.421 & 9.040 & 33.453 & 19.886 & 12.359 & 10.465 & 0.000 & 8.556 \\ 33.883 & 11.996 & 27.228 & 12.615 & 28.872 & 15.906 & 13.710 & 8.982 & 8.556 & 0.000 \end{bmatrix}$$

を指標としてクラスタ分析を行う.

(b) 入力データ
非類似度行列 A, $\mathrm{ISW1} = 1, \mathrm{ISW2} = 3, \mathrm{LNA} = 11, \mathrm{NC} = 10, \mathrm{LNP} = 9$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B6CLAN
! *** EXAMPLE OF D6CLAN ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER(LNA=11,NC=10,LNP=9,ISW1=1,ISW2=3)
      DIMENSION A(LNA,NC),DIS(NC-1),IPOS(LNP,2),IW(NC)
!
      READ(5,*) ((A(I,J),J=1,NC),I=1,NC)
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1010) (I,I=1,NC)
      DO 10 I=1,NC
        WRITE(6,1020) I,(A(I,J),J=1,NC)
   10 CONTINUE
!
      WRITE(6,1030) ISW1,ISW2,LNA,NC,LNP
      CALL D6CLAN(A,LNA,NC,IPOS,LNP,DIS,ISW1,ISW2,IW,IERR)
      WRITE(6,2000) IERR
!
      DO 20 I=1,NC-1
```

```
          WRITE(6,2010) IPOS(I,1),IPOS(I,2),DIS(I)
   20 CONTINUE
!
      STOP
!
 1000 FORMAT('  *** D6CLAN ***',/,/,3X,'** INPUT **',/)
 1010 FORMAT('     I',10(I4,3X),/,2X,'--+',70('-'))
 1020 FORMAT(' ',I3,'I',10F7.3)
 1030 FORMAT(' ',/,3X,'ISW1 =',I4,5X,' ISW2 =',I4,/,&
                 3X,' LNA =',I4,5X,' NC =',I4,5X,' LNP =',I4,/,/)
 2000 FORMAT('     ** OUTPUT **',/,/,' IERR = ',I4,/)
 2010 FORMAT(11X,I3,' ---',I3,5X,F8.4)
!
      END
```

(d) 出力結果

```
 *** D6CLAN ***

  ** INPUT **

    I   1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
 --+----------------------------------------------------------------------
   1I  0.000 11.432 10.328 10.369 26.271 16.179 21.455 17.142 23.111 33.883
   2I 11.432  0.000 12.656  4.942 18.957 13.443 16.062 11.350 14.159 11.996
   3I 10.328 12.656  0.000  8.019 28.694 15.942 12.338 10.771 18.421 27.228
   4I 10.369  4.942  8.019  0.000 14.353 10.042 14.833  7.866  9.040 12.615
   5I 26.271 18.957 28.694 14.353  0.000 16.356 37.180 22.924 33.453 28.872
   6I 16.179 13.443 15.942 10.042 16.356  0.000 17.771  3.919 19.886 15.906
   7I 21.455 16.062 12.338 14.833 37.180 17.771  0.000  5.752 12.359 13.710
   8I 17.142 11.350 10.771  7.866 22.924  3.919  5.752  0.000 10.465  8.982
   9I 23.111 14.159 18.421  9.040 33.453 19.886 12.359 10.465  0.000  8.556
  10I 33.883 11.996 27.228 12.615 28.872 15.906 13.710  8.982  8.556  0.000

  ISW1 =    1      ISW2 =    3
   LNA =   11      NC =   10      LNP =    9


   ** OUTPUT **

 IERR =    0

             6 ---  8       3.9190
             2 ---  4       4.9420
             9 --- 10       8.5560
             1 ---  3      10.3280
             1 ---  2      10.6190
             6 ---  7      11.7615
             6 ---  9      13.5513
             1 ---  6      15.8938
             1 ---  5      25.2289
```

9.6.3 D6CLDA, R6CLDA クラスタ分析 (観測値データ入力, 非類似度使用)

(1) **機 能**

(個体)×(変量) の多変量特性値データ行列 (a_{ik}) または (a_{ki}) $(i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 1, 2, \cdots, p)$ が与えられて, n 個の特性を持つ個体または変量を分類対象としたい場合に, 以下に述べる測度:

- ユークリッド平方距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} - a_{jk})^2 \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

- 標準化ユークリッド平方距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \frac{(a_{ik} - a_{jk})^2}{s_k^2} \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

ただし, s_k^2 は変量の分散で次式により定義する.

$$s_k^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^{n} (a_{lk} - \bar{a_k})^2 \qquad (\bar{a_k} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} a_{lk})$$

これは 各変量の分散を 1 に標準化しておいて, ユークリッド平方距離を求めることと同じである.

- マハラノビスの汎距離

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{p} (a_{ik} - a_{jk}) v_{km} (a_{im} - a_{jm}) \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

ただし, v_{km} は, 個体または変量の分散共分散行列の逆行列の (k, m) 要素である.

- ミンコフスキー距離

$$d_{ij} = \{\sum_{k=1}^{p} \mid a_{ik} - a_{jk} \mid^r\}^{1/r} \qquad (r \geq 1.0; i, j = 1, \cdots, n)$$

を用いて i 番目と j 番目の個体または変量間の非類似度 d_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を求め, これを指標として, クラスタ分析を行う. なお, クラスタ p とクラスタ q を融合して新しくクラスタ t をつくった場合, クラスタ t と別の任意のクラスタ r との間の非類似度 d_{tr} の定義として以下の測度を用いる. ただし, n_p はクラスタ p の中に含まれる対象の数を表す.

- 最短距離法

$$d_{tr} = \min(d_{pr}, d_{qr})$$

- 最長距離法

$$d_{tr} = \max(d_{pr}, d_{qr})$$

- 群平均法

$$d_{tr} = \frac{n_p d_{pr} + n_q d_{qr}}{n_p + n_q}$$

- 重心法

$$d_{tr} = \frac{n_p}{n_p + n_q} d_{pr} + \frac{n_q}{n_p + n_q} d_{qr} - \frac{n_p n_q}{(n_p + n_q)^2} d_{pq}$$

- メジアン法

$$d_{tr} = \frac{1}{2} d_{pr} + \frac{1}{2} d_{qr} - \frac{1}{4} d_{pq}$$

- ウォード法

$$d_{tr} = \frac{n_p + n_r}{n_t + n_r} d_{pr} + \frac{n_q + n_r}{n_t + n_r} d_{qr} - \frac{n_r}{n_t + n_r} d_{pq}$$

- 可変法

$$d_{tr} = \frac{1-\beta}{2} d_{pr} + \frac{1-\beta}{2} d_{qr} + \beta d_{pq} \quad (-\frac{1}{4} \le \beta \le 0)$$

ただし, 重心法, メジアン法, ウォード法は非類似度が (標準化) ユークリッド平方距離で与えられることを前提としている.

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL D6CLDA (A, LX, LY, NX, NY, ML, NC, IPOS, LNP, DIS, ISW1, ISW2, IW, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL R6CLDA (A, LX, LY, NX, NY, ML, NC, IPOS, LNP, DIS, ISW1, ISW2, IW, W1, IERR)

(3) **引 数**

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　 { 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	A	{D, R}	LX,LY	入 力	観測値データ a_{ik} または a_{ki} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 1, 2, \cdots, p)$ (注意事項 (a) 参照)
2	LX	I	1	入 力	配列 A の整合寸法
3	LY	I	1	入 力	配列 A の第 2 寸法
4	NX	I	1	入 力	観測値データ行列の行数 (n または p)
5	NY	I	1	入 力	観測値データ行列の列数 (p または n)
6	ML	I	1	入 力	MAX(LX, LY)
7	NC	I	1	入 力	対象の数 n (NX または NY)
8	IPOS	I	LNP, 2	出 力	クラスタの融合を示す情報 (注意事項 (b) 参照) i 回目に, IPOS(i, 1) 番目と IPOS(i, 2) 番目のクラスタが融合したことを示す. (i = 1, ⋯, NC − 1)
9	LNP	I	1	入 力	配列 IPOS の整合寸法
10	DIS	{D, R}	NC − 1	入 力	ISW1=14, 24(ミンコフスキー距離) のとき, DIS(1) に, $r (r \ge 1.0)$ の値を入力する. ISW2 = 7 のときは DIS(2) に $\beta(-1/4 \le \beta \le 0)$(既定値:$\beta = -1/4$) を入力する. それ以外の場合には設定不要.
				出 力	クラスタ融合距離情報: i 回目に, 距離 DIS(i) でクラスタが融合したことを示す. (i = 1, ⋯, NC − 1)

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
11	ISW1	I	1	入 力	非類似度の計算処理スイッチ ISW1=11:ユークリッド平方距離 ISW1=12:標準化ユークリッド平方距離 ISW1=13:マハラノビスの (汎) 距離 ISW1=14:ミンコフスキー距離 ただし, ISW1=1x については NX=n ISW1=21:ユークリッド平方距離 ISW1=22:標準化ユークリッド平方距離 ISW1=23:マハラノビスの (汎) 距離 ISW1=24:ミンコフスキー距離 ただし, ISW1=2x については NY=n
12	ISW2	I	1	入 力	分析法の選択スイッチ ISW2=1:最短距離法 ISW2=2:最長距離法 ISW2=3:群平均法 ISW2=4:重心法 ISW2=5:メジアン法 ISW2=6:ウォード法 ISW2=7:可変法 (β を入力)
13	IW	I	NC	ワーク	作業領域
14	W1	$\begin{Bmatrix} \mathrm{D} \\ \mathrm{R} \end{Bmatrix}$	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** $\mathrm{ISW1} = 11, 12, 13, 14$ のとき, $\mathrm{ML} \times \mathrm{NC} + \mathrm{NY} \times (\mathrm{ML} + 1) + 2$ $\mathrm{ISW1} = 21, 22, 23, 24$ のとき, $\mathrm{ML} \times \mathrm{NC} + \mathrm{NX} \times (\mathrm{ML} + 1) + 2$
15	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $1 < \mathrm{NX} \le \mathrm{LX}, 1 < \mathrm{NY} \le \mathrm{LY}$

(b) $\mathrm{NC} = \mathrm{NX}(\mathrm{ISW1} = 11, 12, 13, 14$ のとき$)$ または $\mathrm{NY}(\mathrm{ISW1} = 21, 22, 23, 24$ のとき$)$

(c) $\mathrm{LNP} \ge \mathrm{NC} - 1$

(d) $\mathrm{ML} = \mathrm{MAX}(\mathrm{LX}, \mathrm{LY})$

(e) $11 \le \mathrm{ISW1} \le 14$ または $21 \le \mathrm{ISW2} \le 24$

(f) $1 \le \mathrm{ISW2} \le 7$

(g) $\mathrm{ISW1} = 14$ または 24 のとき, $\mathrm{DIS}(1) \ge 1.0$

(h) $\mathrm{ISW2} = 7$ のとき, $-1/4 \le \mathrm{DIS}(2) \le 0$
(既定値にするため, 1.0 を入力する場合は除く)

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	制限条件 (h) を満足しなかった.	既定値にセットして処理を続ける.
3000	制限条件 (a) または (b) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (c) を満足しなかった.	
3020	制限条件 (d) を満足しなかった.	
3030	制限条件 (e) または (f) を満足しなかった.	
3040	制限条件 (g) を満足しなかった.	
4000	入力した観測値データでは, マハラノビスの (汎) 距離による計算はできない. (9.1.1 参照)	

(6) **注意事項**

(a) 観測値データの対象の単位がそれぞれ異なり, 非類似度の計算にユークリッド平方距離, ミンコフスキー距離を用いる場合, 対象間の適切な位置関係が反映されるように, あらかじめデータを標準化しておくことが望ましい.

(b) 配列 IPOS には, 何回目の融合でどのクラスタとどのクラスタが融合したかの情報が格納される. ただし, 融合してできたクラスタに対しては, 融合前の 2 つのクラスタの番号のうち若い方を付けている. 例えば, クラスタ 3 とクラスタ 5 が融合してできたクラスタには, 3 と名付ける. ただし, NC=NX のとき m=NY, NC=NY のとき m=NX である.

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値データ行列

$$A = \begin{bmatrix} 0.321 & 119 & 6 & 40 & 6 & 6 & 12 & 29 \\ 0.301 & 112 & 9 & 38 & 4 & 2 & 3 & 31 \\ 0.288 & 133 & 15 & 53 & 4 & 5 & 12 & 30 \\ 0.280 & 112 & 9 & 47 & 4 & 2 & 10 & 24 \\ 0.261 & 109 & 3 & 21 & 1 & 3 & 13 & 21 \\ 0.256 & 107 & 8 & 34 & 4 & 2 & 17 & 38 \\ 0.253 & 95 & 16 & 57 & 4 & 6 & 7 & 37 \\ 0.250 & 100 & 13 & 46 & 4 & 3 & 13 & 37 \\ 0.249 & 92 & 17 & 48 & 6 & 2 & 7 & 23 \\ 0.227 & 88 & 12 & 45 & 4 & 0 & 3 & 33 \end{bmatrix}$$

から, 行数を対象の数とし, 非類似度行列 (標準化ユークリッド平方距離) を指標として, 群平均法でクラスタ分析を行う.

(b) 入力データ

観測値データ行列 A, $\mathrm{LX} = 11, \mathrm{LY} = 9, \mathrm{NX} = 10, \mathrm{NY} = 8, \mathrm{ML} = 11, \mathrm{NC} = 10, \mathrm{LNP} = 9, \mathrm{ISW1} = 12, \mathrm{ISW2} = 3$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM B6CLDA
! *** EXAMPLE OF D6CLDA ***
```

```
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER(LX=11,LY=9,NX=10,NY=8,ML=11,NC=10,LNP=9,ISW1=12,ISW2=3)
      DIMENSION A(LX,LY),W1(ML*NC+NY*(ML+1)+2)
      DIMENSION DIS(NC-1),IPOS(LNP,2),IW(NC)
!
      READ(5,*) ((A(I,J),J=1,8),I=1,10)
      WRITE(6,1000)
      WRITE(6,1010) 'A','B','C','D','E','F','G','H'
      DO 10 I=1,NX
        WRITE(6,1020) I,(A(I,J),J=1,NY)
   10 CONTINUE
!
      WRITE(6,1030) ISW1,ISW2,LX,LY,NX,NY,ML,NC,LNP
      CALL D6CLDA(A,LX,LY,NX,NY,ML,NC,IPOS,LNP,DIS,&
                        ISW1,ISW2,IW,W1,IERR)
      WRITE(6,2000) IERR
!
      DO 20 I=1,NC-1
        WRITE(6,2010) IPOS(I,1),IPOS(I,2),DIS(I)
   20 CONTINUE
      STOP
!
 1000 FORMAT('  *** D6CLDA ***',/,/,3X,'** INPUT **',/)
 1010 FORMAT('    I',8(4X,A,3X),/,2X,'--+',64('-'))
 1020 FORMAT(' ',I3,'I',8F8.3)
 1030 FORMAT(' ',/,3X,'ISW1 =',I4,5X,' ISW2 =',I4,/,&
                3X,' LX =',I4,5X,' LY =',I4,/,&
                3X,' NX =',I4,5X,' NY =',I4,/,&
                3X,' ML =',I4,5X,' NC =',I4,5X,' LNP =',I4,/,/)
 2000 FORMAT('    ** OUTPUT **',/,/,' IERR = ',I4,/)
 2010 FORMAT(11X,I3,' ---',I3,5X,F8.4)
!
      END
```

(d) 出力結果

```
  *** D6CLDA ***

   ** INPUT **

    I     A       B       C       D       E       F       G       H
  --+----------------------------------------------------------------
    1I   0.321 119.000   6.000  40.000   6.000   6.000  12.000  29.000
    2I   0.301 112.000   9.000  38.000   4.000   2.000   3.000  31.000
    3I   0.288 133.000  15.000  53.000   4.000   5.000  12.000  30.000
    4I   0.280 112.000   9.000  47.000   4.000   2.000  10.000  24.000
    5I   0.261 109.000   3.000  21.000   1.000   3.000  13.000  21.000
    6I   0.256 107.000   8.000  34.000   4.000   2.000  17.000  38.000
    7I   0.253  95.000  16.000  57.000   4.000   6.000   7.000  37.000
    8I   0.250 100.000  13.000  46.000   4.000   3.000  13.000  37.000
    9I   0.249  92.000  17.000  48.000   6.000   2.000   7.000  23.000
   10I   0.227  88.000  12.000  45.000   4.000   0.000   3.000  33.000

   ISW1 =  12      ISW2 =   3
    LX =  11        LY =   9
    NX =  10        NY =   8
    ML =  11        NC =  10      LNP =   9


    ** OUTPUT **

 IERR =    0

             6 ---  8      3.9189
             2 ---  4      4.9420
             9 --- 10      8.5561
             1 ---  3     10.3283
             1 ---  2     10.6194
             6 ---  7     11.7613
             6 ---  9     13.5513
             1 ---  6     15.8940
             1 ---  5     25.2297
```

第 10 章　回帰分析

10.1　概 要

回帰分析では, 複数の変量からなる統計データにおいて, 一方の変量から他方の変量の値を予測しようとする場合に, 両者の間に幾つかのパラメータからなる関数関係を想定して観測値からそのパラメータを推定する. 求められたパラメータは**回帰係数**と呼ばれる. 回帰分析によって得られる関数は, 観測データをある指標に基づいて近似する関数を与える.

本ライブラリでは, 回帰分析を行うための以下の機能を用意している.

- 線形回帰
- 非線形回帰

10.1.1 解説

(1) **直線回帰**

n 個の観測値 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ が, 直線回帰のモデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする. ここで, ε_i は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である. 係数 β_0, β_1 の推定値 b_0, b_1 を最小二乗法により求めることを直線回帰という. b_0, b_1 は次式で得られる.

$$b_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2}$$

$$b_0 = \mu_y - b_1 \mu_x$$

ここで, μ_x, μ_y は x_i, y_i の平均で次式で与えられる.

$$\mu_x = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \ \mu_y = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

線形回帰による分散分析表は以下の通り.

	平方和	自由度	不偏分散	F 比
全変動	S_T	$n-1$		
回帰による変動	S_R	1	$V_R = S_R$	$F = \dfrac{V_R}{V_E}$
残差変動	$S_E = S_T - S_R$	$n-2$	$V_E = \dfrac{S_E}{n-2}$	

ここで

$$S_T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2$$

$$S_R = b_1 \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \right)$$

なお, 統計量 b_0, b_1 の分散の推定値 ${\varepsilon_0}^2$, ${\varepsilon_1}^2$ は

$${\varepsilon_0}^2 = V_E \left(\frac{1}{n} + \frac{{\mu_x}^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2} \right)$$

$${\varepsilon_1}^2 = \frac{V_E}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2}$$

で与えられ, 帰無仮説 $H_0 : \beta_0 = 0$ のもとで自由度 $n-2$ の t 分布に従う検定量 t_0 と帰無仮説 $H_0 : \beta_1 = 0$ のもとで自由度 $n-2$ の t 分布に従う検定量 t_1 がそれぞれ次の様に与えられる.

$$t_0 = \frac{b_0}{\varepsilon_0}$$

$$t_1 = \frac{b_1}{\varepsilon_1}$$

(2) **直線回帰 (繰り返しデータ)**

n 個の独立変数の値 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対応して与えられた m_i 個の従属変数の値 y_{ij} $(j = 1, 2, \cdots, m_i; i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられていて, 直線回帰のモデル

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (j = 1, 2, \cdots, m_i; i = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする. ここで, ε_i は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である. 係数 β_0, β_1 の推定値 b_0, b_1 を最小二乗法により求める. b_0, b_1 は次式で得られる.

$$b_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(x_i - \mu_x)(y_{ij} - \mu_y)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \mu_x)^2}$$

$$b_0 = \mu_y - b_1 \mu_x$$

ここで, μ_x, μ_y は x_i, y_{ij} の (重みつき) 平均で次式で与えられる.

$$\mu_x = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad \mu_y = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

線形回帰による分散分析表は以下の通り.

	平方和	自由度	不偏分散	F 比
全変動	S_T	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i - 1$		
回帰による変動	S_R	1	$V_R = S_R$	$F_R = \dfrac{V_R}{V_E}$
残差変動	$S_E = S_T - S_R$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i - 2$	$V_E = \dfrac{S_E}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i - 2}$	
高次回帰による変動	$S_L = S_B - S_R$	$n-2$	$V_L = \dfrac{S_L}{n-2}$	$F_L = \dfrac{V_L}{V_W}$
級間変動	S_B	$n-1$	$V_B = \dfrac{S_B}{n-1}$	$F_B = \dfrac{V_B}{V_W}$
級内変動	$S_W = S_T - S_B$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i - n$	$V_W = \dfrac{S_W}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i - n}$	

ここで

$$S_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij} - \mu_y)^2$$

$$S_R = b_1 \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(x_i - \mu_x)(y_{ij} - \mu_y) \right)$$

$$S_B = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}}{m_i} - \mu_y \right)^2$$

なお, 統計量 b_0, b_1 の分散の推定値 ${\varepsilon_0}^2$, ${\varepsilon_1}^2$ は

$${\varepsilon_0}^2 = V_E \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \frac{{\mu_x}^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \mu_x)^2} \right)$$

$${\varepsilon_1}^2 = \frac{V_E}{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \mu_x)^2}$$

で与えられ, 帰無仮説 $H_0 : \beta_0 = 0$ のもとで自由度 $\sum_{i=1}^{n} m_i - 2$ の t 分布に従う検定量 t_0 と帰無仮説 $H_0 : \beta_1 = 0$ のもとで自由度 $\sum_{i=1}^{n} m_i - 2$ の t 分布に従う検定量 t_1 がそれぞれ次の様に与えられる.

$$t_0 = \frac{b_0}{\varepsilon_0}$$

$$t_1 = \frac{b_1}{\varepsilon_1}$$

(3) **重回帰**

m 変数からなる n 個の独立変数の値 x_{ki} $(k = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, m)$ とそれに対応して与えられた n 個の従属変数の値 y_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられていて, 線形回帰のモデル

$$y_k = \beta_0 + \beta_1 x_{k1} + \beta_2 x_{k2} + \cdots + \beta_m x_{km} + \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする. ここで, ε_k は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である. 偏回帰係数 β_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ の推定値 b_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ を最小二乗法により求めることを重回帰という. b_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ は $m - 1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{b} = (b_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ についての連立 1 次方程式 (正規方程式)

$$C\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}$$

を解くことによって得られる. ここで行列 $C = (c_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ とベクトル $\boldsymbol{u} = (u_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ の各要素は以下の様に定義される.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(x_{ki} - \mu_i)(x_{kj} - \mu_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m)$$

$$u_j = \sum_{k=1}^{n}(x_{ki} - \mu_i)(y_j - \nu) \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

ここで μ_i と ν はそれぞれ

$$\mu_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{ki}}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\nu = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n}$$

なお, b_0 は

$$b_0 = \nu - \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i$$

から得られる.

線形回帰による分散分析表は以下の通り.

	平方和	自由度	不偏分散	F 比
全変動	S_T	$n-1$		
回帰による変動	S_R	m	$V_R = \dfrac{S_R}{m}$	$F = \dfrac{V_R}{V_E}$
残差変動	$S_E = S_T - S_R$	$n-m-1$	$V_E = \dfrac{S_E}{n-m-1}$	

ここで

$$S_T = \sum_{k=1}^{n}(y_k - \nu)^2$$

$$S_R = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(\sum_{k=1}^{n}(x_{ki} - \mu_i)(y_i - \nu) \right)$$

なお, 行列 C の逆行列の要素を d_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ とすると, 統計量 b_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ の分散の推定値 ${\varepsilon_i}^2$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ は

$${\varepsilon_0}^2 = V_E \left(\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \mu_i \mu_j d_{ij} \right)$$

$${\varepsilon_i}^2 = V_E d_{ii} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

で与えられ, 帰無仮説 $H_0 : \beta_i = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ のもとで自由度 $n - m - 1$ の t 分布に従う検定量 $t_i(i = 0, 1, \cdots, m)$ は次の様に与えられる.

$$t_i = \frac{b_i}{\varepsilon_i} \quad (i = 0, 1, \cdots, m)$$

(4) **多項式回帰**

n 個の独立変数の値 x_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とそれに対応して与えられた n 個の従属変数の値 y_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられていて, 回帰のモデル

$$y_k = \beta_0 + \beta_1 x_k + \beta_2 {x_k}^2 + \cdots + \beta_m {x_k}^m + \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする．ここで, ε_k は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である．偏回帰係数 β_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ の推定値 b_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ を最小二乗法により求める．b_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ は $m - 1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{b} = (b_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ についての連立 1 次方程式 (正規方程式)

$$C\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}$$

を解くことによって得られる. ここで行列 $C = (c_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ とベクトル $\boldsymbol{u} = (u_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ の各要素は以下の様に定義される.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({x_k}^i - \mu_i)({x_k}^j - \mu_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m)$$

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} ({x_k}^i - \mu_i)(y_j - \nu) \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

ここで μ_i と ν はそれぞれ

$$\mu_i = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {x_k}^i}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\nu = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k}{n}$$

なお, b_0 は

$$b_0 = \nu - \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i$$

から得られる.

回帰による分散分析表は以下の通り.

	平方和	自由度	不偏分散	F 比
全変動	S_T	$n - 1$		
回帰による変動	S_R	m	$V_R = \dfrac{S_R}{m}$	$F = \dfrac{V_R}{V_E}$
残差変動	$S_E = S_T - S_R$	$n - m - 1$	$V_E = \dfrac{S_E}{n - m - 1}$	

ここで

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \nu)^2$$

$$S_R = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k{}^i - \mu_i)(y_i - \nu) \right)$$

なお, 行列 C の逆行列の要素を d_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ とすると, 統計量 b_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ の分散の推定値 ${\varepsilon_i}^2$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ は

$${\varepsilon_0}^2 = V_E \left(\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \mu_i \mu_j d_{ij} \right)$$

$${\varepsilon_i}^2 = V_E d_{ii} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

で与えられ, 帰無仮説 $H_0 : \beta_i = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ のもとで自由度 $n - m - 1$ の t 分布に従う検定量 $t_i (i = 0, 1, \cdots, m)$ は次の様に与えられる.

$$t_i = \frac{b_i}{\varepsilon_i} \quad (i = 0, 1, \cdots, m)$$

備考:正規方程式の係数行列は, かなり性質が悪い場合が多く, 特に変量の数が大きくなると急速に特異に近づく傾向がある. 多項式回帰の場合はそれがはなはだしい. したがって, 計算は可能な限り倍精度のサブルーチンで行う方がよい.

(5) **任意の関数による回帰**

m 変数からなる n 個の独立変数の組 $\boldsymbol{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{mk})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とそれに対応して与えられた n 個の従属変数の値 y_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられていて, 回帰のモデル

$$y_k = f(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする. ここで, ε_k は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である. このとき, 回帰モデルの ℓ 個のパラメータ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\ell)$ の推定値 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_\ell)$ を求める. $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_\ell)$ は残差変動

$$S_e = \sum_{k=1}^{n} (y_k - f(x_k; \boldsymbol{\beta}))^2$$

を最小化する $\boldsymbol{\beta}$ として, 非線形最小二乗法により求められる.

回帰による分散分析表は以下の通り.

	平方和	自由度	不偏分散
全変動	S_T	n	
残差変動	S_E	$n - \ell$	$V_E = \dfrac{S_E}{n - \ell}$

ここで

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

$$S_E = \sum_{i=1}^{n} (y_k - f(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{b}))^2$$

また, 次式で定義される漸近的分散共分散行列 $V = (V_{ij})\ (i, j = 1, \cdots, \ell)$ と統計量 $b_i\ \ (i = 1, \cdots, \ell)$ の標準誤差推定値 $\varepsilon_i\ \ (i = 1, \cdots, \ell)$ を求める.

$$V = S_E(J^T J)^{-1}$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{V_{ii}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \ell)$$

ここで J は (i, j) 要素が

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{b}} \qquad (i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, \ell)$$

で定義されるヤコビ行列である.

10.1.2 参考文献

(1) 戸田英雄, 清水竜蔵, 竹内寿一郎 著, “標準化と品質管理” , 日本規格協会 統計数値表編集委員会報告 (1969.1).

(2) ドレーパー 著, 中村慶一 訳, “応用回帰分析” , 森北出版.

(3) スネデカー 著, 奥野忠一 他訳, “統計的方法” , 岩波書店.

(4) 奥野忠一 他著, “多偏量解析法” , 日本科学技術連盟.

(5) 岸根卓郎 著, “理論応用統計学” , 養賢堂.

10.2 線形回帰

10.2.1 DNLNRG, RNLNRG
直線回帰

(1) **機 能**

n 個の観測値 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ が, 直線回帰のモデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする. ここで, ε_i は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である.

このとき, 本サブルーチンは以下の情報を提供する.

(a) 係数 β_0, β_1 の推定値 b_0, b_1

(b) 線形回帰による分散分析表を作成するための諸統計量

	平方和	自由度	不偏分散	F 比
全変動	S_T	$n-1$		
回帰による変動	S_R	1	$V_R = S_R$	$F = \dfrac{V_R}{V_E}$
残差変動	$S_E = S_T - S_R$	$n-2$	$V_E = \dfrac{S_E}{n-2}$	

(c) 重相関係数 R

$$R = \sqrt{\frac{S_R}{S_T}}$$

(d) 統計量 b_0, b_1 の標準誤差推定値 ε_0, ε_1

(e) 帰無仮説 $H_0 : \beta_0 = 0$ のもとで自由度 $n-2$ の t 分布に従う検定量 t_0

(f) 帰無仮説 $H_0 : \beta_1 = 0$ のもとで自由度 $n-2$ の t 分布に従う検定量 t_1

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DNLNRG (X, Y, N, B0, B1, R, STAT, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RNLNRG (X, Y, N, B0, B1, R, STAT, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	X	{D / R}	N	入 力	独立変量の観測値データ x_i
2	Y	{D / R}	N	入 力	従属変量の観測値データ y_i
3	N	I	1	入 力	観測値の数 n
4	B0	{D / R}	3	出 力	B0(1):β_0 の推定値 b_0 B0(2):β_0 の標準誤差推定値 ε_0 B0(3):β_0 の検定量 t_0
5	B1	{D / R}	3	出 力	B1(1):β_1 の推定値 b_1 B1(2):β_1 の標準誤差推定値 ε_1 B1(3):β_1 の検定量 t_1
6	R	{D / R}	2	出 力	R(1):重相関係数 R R(2):寄与率 R^2
7	STAT	{D / R}	21	出 力	計算結果の基礎統計量 (注意事項 (a) 参照)
8	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) N $\geq$ 3

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	独立変量間に差がない.	B0, B1, R, STAT(1) から STAT(9) の全てを 0.0 とする.
1010	残差が 0.0(STAT(3)=0.0)	STAT(9), B0(3), B1(3) に正の最大値がセットされる.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.

(6) **注意事項**

(a) 配列 STAT には以下に示す様な配列を 1 次元ベクトルとして格納する.

1:	S_T	全変動
2:	S_R	回帰による変動
3:	S_E	残差変動
4:	$f_T = n - 1$	全変動の自由度
5:	$f_R = 1$	回帰による変動の自由度
6:	$f_E = n - 2$	残差変動の自由度
7:	V_R	回帰による変動の不偏分散
8:	V_E	残差変動の不偏分散
9:	F	F 比
10:	$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	x_i の平均値
11:	$\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$	y_i の平均値
12:	$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}{n-1}}$	x_i の標準偏差
13:	$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}{n-1}}$	y_i の標準偏差
14:	$s_x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$	x_i の総和
15:	$s_y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$	y_i の総和
16:	$s_{xx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$	x_i の 2 乗和
17:	$s_{yy} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$	y_i の 2 乗和
18:	$s_{xy} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	x_i, y_i の積和
19:	$S_{xx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2$	x_i の偏差平方和
20:	$S_{yy} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu_y)^2$	y_i の偏差平方和
21:	$S_{xy} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$	x_i, y_i の偏差積和

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値データ

X(1)=1.0	Y(1)=−2.0
X(2)=2.0	Y(2)=7.0
X(3)=3.0	Y(3)=34.0
X(4)=4.0	Y(4)=91.0
X(5)=5.0	Y(5)=190.0
X(6)=6.0	Y(6)=343.0
X(7)=7.0	Y(7)=562.0
X(8)=8.0	Y(8)=859.0
X(9)=9.0	Y(9)=1246.0
X(10)=10.0	Y(10)=1735.0
X(11)=11.0	Y(11)=2338.0

から, 回帰分析により, 回帰係数値, 重相関係数値, 寄与率, および基礎統計量を求める.

(b) 入力データ

観測値データ X, Y, N=11

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM BNLNRG
! *** EXAMPLE OF DNLNRG ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(11),Y(11),B0(3),B1(3),R(2),STAT(21)
!
      READ(5,*) N
      READ(5,*) (X(I),I=1,N)
      READ(5,*) (Y(I),I=1,N)
!
      WRITE(6,1000)
      DO 10 I=1,N
        WRITE(6,2000) I,X(I),Y(I)
   10 CONTINUE
!
      CALL DNLNRG(X,Y,N,B0,B1,R,STAT,IERR)
!
      WRITE(6,3000) IERR
      WRITE(6,3010) (B1(I),I=1,3)
      WRITE(6,3020) (B0(I),I=1,3)
      WRITE(6,3030) (R(I),I=1,2)
      WRITE(6,4000)
      WRITE(6,4010) STAT(1),INT(STAT(4)),STAT(2),INT(STAT(5)),&
                    STAT(3),INT(STAT(6))
      WRITE(6,4020)
      WRITE(6,4030) STAT(7),STAT(9),STAT(8)
      WRITE(6,5000)
      WRITE(6,5010) 'MEAN OF X                 : ',10,STAT(10)
      WRITE(6,5010) 'MEAN OF Y                 : ',11,STAT(11)
      WRITE(6,5010) 'STANDARD DEVIATION OF X   : ',12,STAT(12)
      WRITE(6,5010) 'STANDARD DEVIATION OF Y   : ',13,STAT(13)
      WRITE(6,5010) 'SUM OF X                  : ',14,STAT(14)
      WRITE(6,5010) 'SUM OF Y                  : ',15,STAT(15)
      WRITE(6,5010) 'SUM OF SQUARES OF X       : ',16,STAT(16)
      WRITE(6,5010) 'SUM OF SQUARES OF Y       : ',17,STAT(17)
      WRITE(6,5010) 'SUM OF PRODUCTS OF X AND Y : ',18,STAT(18)
      WRITE(6,5020) 'SUM OF SQUARES OF           '
      WRITE(6,5010) '    DEVIATIONS OF X       : ',19,STAT(19)
      WRITE(6,5020) 'SUM OF SQUARES OF           '
      WRITE(6,5010) '    DEVIATIONS OF Y       : ',20,STAT(20)
      WRITE(6,5020) 'SUM OF PRODUCTS OF          '
      WRITE(6,5010) '    DEVIATIONS OF X AND Y  : ',20,STAT(21)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' **** INPUT DATA ****',/,/,6X,'  N','I',15X,'X',24X,'Y',&
               /,6X,'---+',50('-'))
 2000 FORMAT(6X,I3,'I',2(5X,D20.10))
 3000 FORMAT(' ',/,/,' *** OUTPUT ***',/,/,4X,'IERR=',I4,&
             /,/,3X,'*REGRESSION COEFFICIENT*',&
             /,/,21X,'R.C',13X,'S.E',12X,'T-V',/,4X,12('-'),'+',42('-'))
 3010 FORMAT(4X,'B1(X)',7X,'I',3D14.6)
 3020 FORMAT(4X,'B0(CONSTANT)','I',3D14.6)
 3030 FORMAT(' ',/,4X,'R(1)(MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT) =',&
               D20.10,/,4X,'R(2)(CONTRIBUTION RATIO)',15X,'=',D20.10)
 4000 FORMAT(' ',/,/,3X,'*ANALYSIS OF VARIANCE TABLE*',/,/,4X,'FACTOR OF ',&
              /,4X,'VARIATION',2X,'I',5X,'SUM OF SQUARES',&
              15X,'DEGREES OF FREEDOM',/,4X,11('-'),'+',55('-'))
```

```
 4010 FORMAT(4X,'TOTAL',6X,'ISTAT(1) = ',D18.10,6X,&
                                'STAT(4) = ',I3,/,15X,'I',&
               /,4X,'DUE TO',5X,'ISTAT(2) = ',D18.10,6X,&
                'STAT(5) = ',I3,/,4X,'REGRESSION I',/,15X,'I',&
               /,4X,'DEVIATION  ISTAT(3) = ',D18.10,6X,&
                'STAT(6) = ',I3,/,5X,'FROM',6X,'I',/,4X,'REGRESSION I')
 4020 FORMAT(' ',/,/,4X,'FACTOR OF ',/,4X,'VARIATION',&
                 2X,'I',3X,'UNBIASED VARIANCE',&
                 21X,'F-RATIO',/,4X,11('-'),'+',62('-'))
 4030 FORMAT(4X,'DUE TO',5X,'ISTAT(7) = ',D18.10,6X,&
                'STAT(9) = ',D18.10,/,4X,'REGRESSION I',/,15X,'I',&
               /,4X,'DEVIATION  ISTAT(8) = ',D18.10,6X,&
               /,5X,'FROM',6X,'I',/,4X,'REGRESSION I')
 5000 FORMAT(' ',/,/,3X,'*STATISTICS*')
 5010 FORMAT(5X,A31,'STAT(',I2,') =',D14.6)
 5020 FORMAT(5X,A31)
      END
```

(d) 出力結果

```
**** INPUT DATA ****

       NI              X                        Y
     ---+---------------------------------------------------
       1I        0.1000000000D+01       -0.2000000000D+01
       2I        0.2000000000D+01        0.7000000000D+01
       3I        0.3000000000D+01        0.3400000000D+02
       4I        0.4000000000D+01        0.9100000000D+02
       5I        0.5000000000D+01        0.1900000000D+03
       6I        0.6000000000D+01        0.3430000000D+03
       7I        0.7000000000D+01        0.5620000000D+03
       8I        0.8000000000D+01        0.8590000000D+03
       9I        0.9000000000D+01        0.1246000000D+04
      10I        0.1000000000D+02        0.1735000000D+04
      11I        0.1100000000D+02        0.2338000000D+04

*** OUTPUT ***

   IERR=   0

  *REGRESSION COEFFICIENT*

                 R.C             S.E            T-V
   ------------+-------------------------------------------
   B1(X)       I  0.219600D+03  0.311249D+02  0.705544D+01
   B0(CONSTANT)I -0.644600D+03  0.211099D+03 -0.305354D+01

   R(1)(MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT) =    0.9202634294D+00
   R(2)(CONTRIBUTION RATIO)               =    0.8468847795D+00

  *ANALYSIS OF VARIANCE TABLE*

   FACTOR OF
   VARIATION  I     SUM OF SQUARES               DEGREES OF FREEDOM
   -----------+--------------------------------------------------------
   TOTAL      ISTAT(1) =   0.6263730000D+07      STAT(4) =  10
              I
   DUE TO     ISTAT(2) =   0.5304657600D+07      STAT(5) =   1
   REGRESSION I
              I
   DEVIATION  ISTAT(3) =   0.9590724000D+06      STAT(6) =   0
    FROM      I
   REGRESSION I


   FACTOR OF
   VARIATION  I   UNBIASED VARIANCE                     F-RATIO
   -----------+---------------------------------------------------------------
   DUE TO     ISTAT(7) =   0.5304657600D+07      STAT(9) =   0.4977926421D+02
   REGRESSION I
              I
   DEVIATION  ISTAT(8) =   0.1065636000D+06
    FROM      I
   REGRESSION I


  *STATISTICS*
      MEAN OF X                  : STAT(10) =  0.600000D+01
      MEAN OF Y                  : STAT(11) =  0.673000D+03
      STANDARD DEVIATION OF X    : STAT(12) =  0.331662D+01
      STANDARD DEVIATION OF Y    : STAT(13) =  0.791437D+03
      SUM OF X                   : STAT(14) =  0.660000D+02
      SUM OF Y                   : STAT(15) =  0.740300D+04
      SUM OF SQUARES OF X        : STAT(16) =  0.506000D+03
      SUM OF SQUARES OF Y        : STAT(17) =  0.112459D+08
      SUM OF PRODUCTS OF X AND Y : STAT(18) =  0.685740D+05
      SUM OF SQUARES OF
          DEVIATIONS OF X        : STAT(19) =  0.110000D+03
      SUM OF SQUARES OF
          DEVIATIONS OF Y        : STAT(20) =  0.626373D+07
      SUM OF PRODUCTS OF
          DEVIATIONS OF X AND Y  : STAT(20) =  0.241560D+05
```

10.2.2 DNLNRR, RNLNRR
直線回帰 (繰り返しデータ)

(1) **機 能**

n 個の独立変数の値 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対応して与えられた m_i 個の従属変数の値 y_{ij} $(j = 1, 2, \cdots, m_i; i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられていて直線回帰のモデル

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (j = 1, 2, \cdots, m_i; i = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする. ここで, ε_i は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である.

このとき, 本サブルーチンは以下の情報を提供する.

(a) 係数 β_0, β_1 の推定値 b_0, b_1

(b) 線形回帰による分散分析表を作成するための諸統計量

	平方和	自由度	不偏分散	F 比
全変動	S_T	$\sum_{i=1}^{n} m_i - 1$		
回帰による変動	S_R	1	$V_R = S_R$	$F_R = \dfrac{V_R}{V_E}$
残差変動	$S_E = S_T - S_R$	$\sum_{i=1}^{n} m_i - 2$	$V_E = \dfrac{S_E}{\sum_{i=1}^{n} m_i - 2}$	
高次回帰による変動	$S_L = S_B - S_R$	$n - 2$	$V_L = \dfrac{S_L}{n-2}$	$F_L = \dfrac{V_L}{V_W}$
級間変動	S_B	$n - 1$	$V_B = \dfrac{S_B}{n-1}$	$F_B = \dfrac{V_B}{V_W}$
級内変動	$S_W = S_T - S_B$	$\sum_{i=1}^{n} m_i - n$	$V_W = \dfrac{S_W}{\sum_{i=1}^{n} m_i - n}$	

(c) 重相関係数 R

$$R = \sqrt{\frac{S_R}{S_T}}$$

(d) 統計量 b_0, b_1 の標準誤差推定値 ε_0, ε_1

(e) 帰無仮説 $H_0 : \beta_0 = 0$ のもとで自由度 $\sum_{i=1}^{n} m_i - 2$ の t 分布に従う検定量 t_0

(f) 帰無仮説 $H_0 : \beta_1 = 0$ のもとで自由度 $\sum_{i=1}^{n} m_i - 2$ の t 分布に従う検定量 t_1

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DNLNRR (X, N, NY, Y, MY, M, B0, B1, R, STAT, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RNLNRR (X, N, NY, Y, MY, M, B0, B1, R, STAT, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型
I: 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8)

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	X	{D, R}	N	入 力	独立変量の観測値データ x_i
2	N	I	1	入 力	独立変量の観測値の数 n
3	NY	I	N	入 力	独立変量に対する各従属変量の繰り返し回数 m_i
4	Y	{D, R}	MY , M	入 力	従属変量の観測値データ y_{ij} (注意事項 (a) 参照)
5	MY	I	1	入 力	配列 Y の整合寸法
6	M	I	1	入 力	従属変量の観測値の最大繰り返し回数 max(m_i)(注意事項 (c) 参照)
7	B0	{D, R}	3	出 力	B0(1):β_0 の推定値 b_0 B0(2):β_0 の標準誤差推定値 ε_0 B0(3):β_0 の検定量 t_0
8	B1	{D, R}	3	出 力	B1(1):β_1 の推定値 b_1 B1(2):β_1 の標準誤差推定値 ε_1 B1(3):β_1 の検定量 t_1
9	R	{D, R}	2	出 力	R(1):重相関係数 R R(2):寄与率 R^2
10	STAT	{D, R}	33	出 力	計算結果の基礎統計量 (注意事項 (b) 参照)
11	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $3 \leq \mathrm{N} \leq \mathrm{MY}$

(b) $1 \leq \mathrm{NY(i)} \leq \mathrm{M}$ $(\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{N})$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	独立変量間に差がない.	B0, B1, R, STAT(1) から STAT(20) の全てを 0.0 とする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値データ $y_{i,j}$ は以下の様な実行列 (2 次元配列型) データとして配列 Y に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,m_1} & * & * \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & \cdots & y_{2,m_2} & * \\ \vdots & & & \vdots & * & * \\ y_{i,1} & & \cdots & \cdots & \cdots & y_{i,m_i} \\ \vdots & & & \vdots & * & * \\ y_{n,1} & \cdots & y_{n,m_n} & * & * & * \end{bmatrix}$$

備考:$*$ は, 任意の値であることを示す.

(b) 配列 STAT には以下に示す様な配列を 1 次元ベクトルとして格納する.

1 :	S_T	全変動
2 :	S_R	回帰による変動
3 :	S_E	残差変動
4 :	$f_T = \sum_{i=1}^{n} m_i - 1$	全変動の自由度
5 :	$f_R = 1$	回帰による変動の自由度
6 :	$f_E = \sum_{i=1}^{n} m_i - 2$	残差変動の自由度
7 :	V_R	回帰による変動の不偏分散
8 :	V_E	残差変動の不偏分散
9 :	F_T	回帰による変動の F 比
10 :	S_L	高次回帰による変動
11 :	S_B	級間変動
12 :	S_W	級内変動
13 :	$f_L = n - 2$	高次回帰による自由度
14 :	$f_B = n - 1$	級間変動の自由度
15 :	$f_W = \sum_{i=1}^{n} m_i - n$	級内変動の自由度

16 : V_L 高次回帰による変動の不偏分散

17 : V_B 級間変動の不偏分散

18 : V_W 級内変動の不偏分散

19 : F_L 高次回帰による変動の F 比

20 : F_B 級間変動の F 比

21 : $\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ x_i の重みつき平均値

22 : $\mu_y = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}}{\sum_{i=1}^n m_i}$ y_{ij} の全平均値

23 : $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n m_i(x_i-\mu_x)^2}{\sum_{i=1}^n m_i-1}}$ x_i の重みつき標準偏差

24 : $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\mu_y)^2}{\sum_{i=1}^n m_i-1}}$ y_{ij} の標準偏差

25 : $s_x = \sum_{i=1}^n m_i x_i$ x_i の重みつき総和

26 : $s_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}$ y_{ij} の総和

27 : $s_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i {x_i}^2$ x_i の重みつき 2 乗和

28 : $s_{yy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} {y_{ij}}^2$ y_{ij} の 2 乗和

29 : $s_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} x_i y_{ij}$ x_i, y_{ij} の積和

30 : $S_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i-\mu_x)^2$ x_i の重みつき偏差平方和

31 : $S_{yy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i}(y_{ij}-\mu_y)^2$ y_{ij} の偏差平方和

32 : $S_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i}(x_i-\mu_x)(y_{ij}-\mu_y)$ x_i, y_{ij} の偏差積和

33 : $\sum_{i=1}^n m_i$ y_{ij} の個数

(c) M=1 のときは, STAT(10) から STAT(20) は計算されない.

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値データ

$$(x_i) = \begin{bmatrix} 55.0 \\ 65.0 \\ 75.0 \\ 80.0 \\ 85.0 \end{bmatrix}, \quad (y_{i,j}) = \begin{bmatrix} 26.0 & 29.0 & 32.0 & 0.0 \\ 32.0 & 35.0 & 0.0 & 0.0 \\ 36.0 & 35.0 & 31.0 & 34.0 \\ 33.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 37.0 & 35.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

繰り返し回数

$$(m_i) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

から, 回帰分析により, 回帰係数値, 重相関係数値, 寄与率, および基礎統計量を求める.

(b) 入力データ

観測値データ X, Y, 繰り返し回数 NY, N=5, MY=5, M=4

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM BNLNRR
! *** EXAMPLE OF DNLNRR ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(5),NY(5),Y(5,4),B0(3),B1(3),R(2),STAT(33)
!
      READ(5,*) MY,N,M
      READ(5,*) (NY(I),I=1,N)
      READ(5,*) (X(I),I=1,N)
      READ(5,*) ((Y(I,J),I=1,MY),J=1,M)
!
      WRITE(6,1000) MY,N,M
      WRITE(6,1010)
      DO 10 I=1,N
        WRITE(6,2000) I,X(I),NY(I),(Y(I,J),J=1,NY(I))
   10 CONTINUE
!
      CALL DNLNRR(X,N,NY,Y,MY,M,B0,B1,R,STAT,IERR)
!
      WRITE(6,3000) IERR
      WRITE(6,3010) (B1(I),I=1,3)
      WRITE(6,3020) (B0(I),I=1,3)
      WRITE(6,3030) (R(I),I=1,2)
!
      WRITE(6,4000)
      WRITE(6,4010) STAT(1),INT(STAT(4)),STAT(2),INT(STAT(5)),&
                    STAT(3),INT(STAT(6))
      WRITE(6,4020) STAT(10),INT(STAT(13)),STAT(11),INT(STAT(14)),&
                    STAT(12),INT(STAT(15))
      WRITE(6,5000) STAT(7),STAT(9),STAT(8)
      WRITE(6,5010) STAT(16),STAT(19),STAT(17),STAT(20),STAT(18)
!
      WRITE(6,6000)
      WRITE(6,6010) 'WEIGHTED MEAN OF X           : ',21,STAT(21)
      WRITE(6,6010) 'GRAND MEAN OF Y              : ',22,STAT(22)
      WRITE(6,6020) 'WEIGHTED STANDARD              '
      WRITE(6,6010) '    DEVIATION OF X           : ',23,STAT(23)
      WRITE(6,6010) 'STANDARD DEVIATION OF Y      : ',24,STAT(24)
      WRITE(6,6010) 'WEIGHTED SUM OF X            : ',25,STAT(25)
      WRITE(6,6010) 'SUM OF Y                     : ',26,STAT(26)
      WRITE(6,6010) 'WEIGHTED SUM OF SQUARES OF X : ',27,STAT(27)
      WRITE(6,6010) 'SUM OF SQUARES OF Y          : ',28,STAT(28)
      WRITE(6,6010) 'SUM OF PRODUCTS OF X AND Y   : ',29,STAT(29)
      WRITE(6,6020) 'WEIGHTED SUM OF SQUARES OF     '
      WRITE(6,6010) '    DEVIATIONS OF X          : ',30,STAT(30)
      WRITE(6,6020) 'SUM OF SQUARES OF              '
      WRITE(6,6010) '    DEVIATIONS OF Y          : ',32,STAT(31)
      WRITE(6,6020) 'SUM OF PRODUCTS OF             '
      WRITE(6,6010) '    DEVIATIONS OF X AND Y    : ',32,STAT(32)
      WRITE(6,6010) 'TOTAL NUMBER OF Y            : ',33,STAT(33)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT(' **** INPUT DATA ****',&
             /,/,8X,'MY =',I2,5X,'N =',I2,5X,'M =',I2)
 1010 FORMAT(' ',/,6X,'  N',' I',6X,'X',6X,'NY',17X,'Y',&
             /,7X,'---+',65('-'))
```

```
 2000 FORMAT(6X,I3,' I',D10.2,I5,4D12.4)
 3000 FORMAT(' ',/,/,' *** OUTPUT ***',/,/,4X,'IERR=',I4,&
             /,/,3X,'*REGRESSION COEFFICIENT*',&
             /,/,21X,'R.C',13X,'S.E',12X,'T-V',/,4X,12('-'),'+',42('-'))
 3010 FORMAT(4X,'B1(X)',7X,'I',3D14.6)
 3020 FORMAT(4X,'B0(CONSTANT)','I',3D14.6)
 3030 FORMAT(' ',/,4X,'R(1)(MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT) =',&
                 D20.10,/,4X,'R(2)(CONTRIBUTION RATIO)',15X,'=',D20.10)
 4000 FORMAT(' ',/,/,3X,'*ANALYSIS OF VARIANCE TABLE*',/,/,&
                  4X,'FACTOR OF ',/,4X,'VARIATION',&
                  2X,'I',5X,'SUM OF SQUARES',&
                  13X,'DEGREES OF FREEDOM',/,4X,11('-'),'+',55('-'))
 4010 FORMAT(4X,'TOTAL',6X,'ISTAT(1)  = ',D18.10,3X,&
                'STAT(4)  = ',I3,/,15X,'I',&
                /,4X,'DUE TO',5X,'ISTAT(2)  = ',D18.10,3X,&
                'STAT(5)  = ',I3,/,4X,'REGRESSION I',/,15X,'I',&
                /,4X,'DEVIATION  ISTAT(3)  = ',D18.10,3X,&
                'STAT(6)  = ',I3,/,5X,'FROM',6X,'I',/,4X,'REGRESSION I',&
                 /,15X,'I')
 4020 FORMAT(4X,'LACK OF',4X,'ISTAT(10) = ',D18.10,3X,&
                'STAT(13) = ',I3,/,4X,'FITNESS',4X,'I',/,15X,'I',&
                /,4X,'BETWEEN',4X,'ISTAT(11) = ',D18.10,3X,&
                'STAT(14) = ',I3,/,15X,'I',&
                /,4X,'WITHIN',5X,'ISTAT(12) = ',D18.10,3X,&
                'STAT(15) = ',I3)
 5000 FORMAT(' ',/,/,4X,'FACTOR OF ',/,4X,'VARIATION',&
                2X,'I',3X,'UNBIASED VARIANCE',&
                21X,'F-RATIO',/,4X,11('-'),'+',62('-'),&
                /,4X,'DUE TO',5X,'ISTAT(7)  = ',D18.10,3X,&
                'STAT(9)  = ',D18.10,/,4X,'REGRESSION I',/,15X,'I',&
                /,4X,'DEVIATION  ISTAT(8)  = ',D18.10,6X,&
                /,5X,'FROM',6X,'I',/,4X,'REGRESSION I',/,15X,'I')
 5010 FORMAT(4X,'LACK OF',4X,'ISTAT(16) = ',D18.10,3X,&
                'STAT(19) = ',D18.10,/,4X,'FITNESS',4X,'I',/,/,15X,'I',&
                /,4X,'BETWEEN',4X,'ISTAT(17) = ',D18.10,3X,&
                'STAT(20) = ',D18.10,/,15X,'I',&
                /,4X,'WITHIN',5X,'ISTAT(18) = ',D18.10)
 6000 FORMAT(' ',/,/,3X,'*STATISTICS*',/)
 6010 FORMAT(5X,A31,'STAT(',I2,') =',D14.6)
 6020 FORMAT(5X,A31)
      END
```

(d) 出力結果

```
**** INPUT DATA ****

       MY = 5     N = 5     M = 4

       N I      X      NY                  Y
      ---+----------------------------------------------------------------
       1 I  0.55D+02    3  0.2600D+02  0.2900D+02  0.3200D+02
       2 I  0.65D+02    2  0.3200D+02  0.3500D+02
       3 I  0.75D+02    4  0.3600D+02  0.3500D+02  0.3100D+02  0.3400D+02
       4 I  0.80D+02    1  0.3300D+02
       5 I  0.85D+02    2  0.3700D+02  0.3500D+02


*** OUTPUT ***

   IERR=   0

  *REGRESSION COEFFICIENT*

                    R.C             S.E            T-V
   ------------+------------------------------------------
   B1(X)       I  0.207891D+00  0.600947D-01  0.345938D+01
   B0(CONSTANT)I  0.182777D+02  0.428021D+01  0.427028D+01

   R(1)(MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT) =    0.7380912731D+00
   R(2)(CONTRIBUTION RATIO)               =    0.5447787274D+00


  *ANALYSIS OF VARIANCE TABLE*

   FACTOR OF
   VARIATION  I     SUM OF SQUARES            DEGREES OF FREEDOM
   -----------+-------------------------------------------------------
   TOTAL      ISTAT(1)  =   0.1089166667D+03   STAT(4)  =  11
              I
   DUE TO     ISTAT(2)  =   0.5933548306D+02   STAT(5)  =   1
   REGRESSION I
              I
   DEVIATION  ISTAT(3)  =   0.4958118361D+02   STAT(6)  =  10
    FROM      I
   REGRESSION I
              I
   LACK OF    ISTAT(10) =   0.1108118361D+02   STAT(13) =   3
   FITNESS    I
              I
   BETWEEN    ISTAT(11) =   0.7041666667D+02   STAT(14) =   4
              I
   WITHIN     ISTAT(12) =   0.3850000000D+02   STAT(15) =   7


   FACTOR OF
   VARIATION  I   UNBIASED VARIANCE                    F-RATIO
   -----------+--------------------------------------------------------------
   DUE TO     ISTAT(7)  =   0.5933548306D+02   STAT(9)  =   0.1196733896D+02
   REGRESSION I
              I
```

```
 DEVIATION  ISTAT(8)  =   0.4958118361D+01
  FROM      I
 REGRESSION I
            I
 LACK OF    ISTAT(16) =   0.3693727871D+01   STAT(19) =   0.6715868855D+00
 FITNESS    I
            I
 BETWEEN    ISTAT(17) =   0.1760416667D+02   STAT(20) =   0.3200757576D+01
            I
 WITHIN     ISTAT(18) =   0.5500000000D+01

*STATISTICS*

  WEIGHTED MEAN OF X           : STAT(21) =  0.704167D+02
  GRAND MEAN OF Y              : STAT(22) =  0.329167D+02
  WEIGHTED STANDARD
      DEVIATION OF X           : STAT(23) =  0.111719D+02
  STANDARD DEVIATION OF Y      : STAT(24) =  0.314667D+01
  WEIGHTED SUM OF X            : STAT(25) =  0.845000D+03
  SUM OF Y                     : STAT(26) =  0.395000D+03
  WEIGHTED SUM OF SQUARES OF X : STAT(27) =  0.608750D+05
  SUM OF SQUARES OF Y          : STAT(28) =  0.131110D+05
  SUM OF PRODUCTS OF X AND Y   : STAT(29) =  0.281000D+05
  WEIGHTED SUM OF SQUARES OF
      DEVIATIONS OF X          : STAT(30) =  0.137292D+04
  SUM OF SQUARES OF
      DEVIATIONS OF Y          : STAT(32) =  0.108917D+03
  SUM OF PRODUCTS OF
      DEVIATIONS OF X AND Y    : STAT(32) =  0.285417D+03
  TOTAL NUMBER OF Y            : STAT(33) =  0.120000D+02
```

10.2.3 DNLNMA, RNLNMA 重回帰

(1) **機 能**

m 変数からなる n 個の独立変数の値 x_{ki} $(k=1,2,\cdots,n; i=1,2,\cdots,m)$ とそれに対応して与えられた n 個の従属変数の値 y_k $(k=1,2,\cdots,n)$ が与えられていて線形回帰のモデル

$$y_k = \beta_0 + \beta_1 x_{k1} + \beta_2 x_{k2} + \cdots + \beta_m x_{km} + \varepsilon_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

に従うとする. ここで, ε_k は独立に $N(0,\sigma^2)$ に従う誤差項である.

このとき, 本サブルーチンは以下の情報を提供する.

(a) 偏回帰係数 β_i $(i=0,1,\cdots,m)$ の推定値 b_i $(i=0,1,\cdots,m)$

(b) 線形回帰による分散分析表を作成するための諸統計量

	平方和	自由度	不偏分散	F 比
全変動	S_T	$n-1$		
回帰による変動	S_R	m	$V_R = \dfrac{S_R}{m}$	$F = \dfrac{V_R}{V_E}$
残差変動	$S_E = S_T - S_R$	$n-m-1$	$V_E = \dfrac{S_E}{n-m-1}$	

(c) 重相関係数 R

$$R = \sqrt{\frac{S_R}{S_T}}$$

(d) 自由度調整済み重相関係数 R^*

$$R^* = \sqrt{1 - \frac{(n-1)S_E}{(n-m-1)S_T}}$$

(e) 統計量 b_i $(i=0,1,\cdots,m)$ の標準誤差推定値 ε_i $(i=0,1,\cdots,m)$

(f) 帰無仮説 $H_0 : \beta_i = 0$ $(i=0,1,\cdots,m)$ のもとで自由度 $n-m-1$ の t 分布に従う検定量 t_i $(i=0,1,\cdots,m)$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DNLNMA (X, MX, M, N, B, R, V, STAT, IW1, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RNLNMA (X, MX, M, N, B, R, V, STAT, IW1, W1, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型　　 { 64 ビット整数版では INTEGER(8) }

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	X	{D/R}	MX, M+1	入 力	独立変量の観測値 x_{ki} および従属変量の観測値 y_k (注意事項 (a) 参照)
2	MX	I	1	入 力	配列 X の整合寸法
3	M	I	1	入 力	独立変量の数 m
4	N	I	1	入 力	観測値の数 n
5	B	{D/R}	$0:\mathrm{M},3$	出 力	B(i, 1):β_i の推定値 b_i B(i, 2): β_i の標準誤差推定値 ε_i B(i, 3): β_i の推定値の t 値 t_i $(i=0,1,\cdots,\mathrm{M})$
6	R	{D/R}	3	出 力	R(1):重相関係数 R R(2):寄与率 R^2 R(3):自由度調整済みの重相関係数 R^*
7	V	{D/R}	9	出 力	分散分析表を作成するための統計量 (注意事項 (b) 参照)
8	STAT	{D/R}	M+1, 5	出 力	計算結果の基礎統計量 (注意事項 (c) 参照)
9	IW1	I	M+1	ワーク	作業領域
10	W1	{D/R}	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:**$(\mathrm{M}+1)\times(\mathrm{M}+3)$
11	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $3 \leq \mathrm{N} \leq \mathrm{MX}$

(b) $1 \leq \mathrm{M} < \mathrm{N}-1$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　味	処 理 内 容
0	正常終了.	
1000	全体の平方和 $\leq$ 回帰の平方和	b_i と t_i に 0.0 をセットする.
2000	残差の不偏分散値 $>$ 全体の不偏分散値	R^* に 0.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
3010	制限条件 (b) を満足しなかった.	
4000	逆行列が求められなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値データ x_{ki} $(k=1,2,\cdots,n; i=1,2,\cdots,m)$, y_k $(k=1,2,\cdots,n)$ は実行列 (2 次元配列型) としては以下のように配列 X に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,m} & y_1 \\ x_{21} & \ddots & & \vdots & y_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{nm} & y_n \end{bmatrix}$$

(b) 配列 V には以下に示す様な 1 次元ベクトルが格納される.

1: S_T 全変動

2: S_R 回帰による変動

3: S_E 残差変動

4: $f_T = n-1$ 全変動の自由度

5: $f_R = m$ 回帰による変動の自由度

6: $f_E = n-m-1$ 残差変動の自由度

7: V_R 回帰による変動の不偏分散

8: V_E 残差変動の不偏分散

9: F F 比

(c) 配列 STAT には以下に示す様な実行列 (2 次元配列型) が格納される. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{k1} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{k2} & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{k,m} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m & \nu \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k1}-\mu_1)^2 & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k2}-\mu_2)^2 & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{km}-\mu_m)^2 & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(y_k-\nu)^2 \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_{k1}-\mu_1)^2}{n-1} & \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_{k2}-\mu_2)^2}{n-1} & \cdots & \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_{km}-\mu_m)^2}{n-1} & \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(y_k-\nu)^2}{n-1} \\ \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_{k1}-\mu_1)^2}{n-1}} & \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_{k2}-\mu_2)^2}{n-1}} & \cdots & \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_{km}-\mu_m)^2}{n-1}} & \sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(y_k-\nu)^2}{n-1}} \end{bmatrix}$$

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値データ

$$(x_{ki}|y_k) = \left[\begin{array}{rrr|r} 2.0 & 1.0 & 3.0 & -1.0 \\ 3.0 & 3.0 & -1.0 & 0.0 \\ 4.0 & -2.0 & 0.0 & 2.0 \\ 1.0 & 1.0 & -2.0 & 2.0 \\ -1.0 & 3.0 & -1.0 & 3.0 \end{array}\right]$$

から, 回帰分析を行い, 回帰係数値, 重相関係数値, 寄与率, および分散分析表, 基礎統計量を求める.

(b) 入力データ

観測値データ X, MX=5, N=5, M=3,

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM BNLNMA
! *** EXAMPLE OF DNLNMA ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      DIMENSION IW1(4),X(5,4),B(0:3,3),R(3),V(9),STAT(4,5),W1(24)
!
          READ(5,*) MX,N,M
          READ(5,*) ((X(I,J),I=1,N),J=1,M+1)
!
          WRITE(6,1000) MX,N,M
          WRITE(6,1010) (I,X(I,M+1),(X(I,J),J=1,M),I=1,N)
!
          CALL DNLNMA(X,MX,M,N,B,R,V,STAT,IW1,W1,IERR)
!
          WRITE(6,3000) IERR
          WRITE(6,3010) (I,(B(I,J),J=1,3),I=0,M)
          WRITE(6,3030) (R(I),I=1,3)
          IV4=V(4)
          IV5=V(5)
          IV6=V(6)
          WRITE(6,3040)
          WRITE(6,3041) V(1),IV4
          WRITE(6,3042) V(2),IV5
          WRITE(6,3043) V(3),IV6
          WRITE(6,3044)
          WRITE(6,3045) V(7),V(9)
          WRITE(6,3046) V(8)
          WRITE(6,3050)
          WRITE(6,3060)&
        (I,STAT(I,1),STAT(I,2),STAT(I,3),STAT(I,4),STAT(I,5),I=1,M+1)
      STOP
!
 1000 FORMAT(1X,/,1X,'**** INPUT DATA ****',&
                /,/,5X,'MX =',I3,5X,'N =',I3,5X,'M  =',I3,&
                /,/,6X,'  N',' I',5X,'Y',4X,'I',14X,'X',&
                 /,7X,'---+',10('-'),'+',29('-'))
 1010 FORMAT(6X,I3,' I',F9.3,' I',3F9.3)
 3000 FORMAT(1X,/,/,2X,'*** OUTPUT ***',/,/,4X,'IERR=',I4,&
              /,/,4X,'*REGRESSION COEFFICIENT*',&
              /,/,27X,'B(I,1)',9X,'B(I,2)',9X,'B(I,3)',&
               /,14X,'I    I',8X,'R.C.',11X,'S.E.',11X,'T-V.',&
              /,11X,8('-'),'+',45('-'))
 3010 FORMAT(14X,I1,'    I',3F15.7)
 3030 FORMAT(1X,/,/,10X,'R(1)(MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT)',10X,&
                     '=',F10.7,&
              /,10X,'R(2)(CONTRIBUTION RATIO)',24X,'=',F10.7,&
              /,10X,'R(3)(ADJUSTED MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT) =',&
                      F10.7)
 3040 FORMAT(1X,/,/,3X,'*ANALYSIS OF VARIANCE TABLE*',&
                /,/,10X,'FACTOR OF',/,10X,'VARIATION',2X,'ISUM OF SQUARES',&
                   5X,'DEGREES OF FREEDOM',/,10X,11('-'),'+',37('-'))
 3041 FORMAT(10X,'TOTAL',6X,'IV(1) =',F10.7,3X,'V(4) =',I3,/,21X,'I')
 3042 FORMAT(10X,'DUE TO',5X,'IV(2) =',F10.7,3X,'V(5) =',I3,&
                  /,10X,'REGRESSION I',/,21X,'I')
 3043 FORMAT(10X,'DEVIATION  IV(3) =',F10.7,3X,'V(6) =',I3,&
                  /,11X,'FROM',6X,'I',/,10X,'REGRESSION I')
 3044 FORMAT(1X,/,/,10X,'FACTOR OF',/,10X,'VARIATION',2X,&
                   'IUNBIASED VARIANCE',5X,'F-RATIO',&
                  /,10X,11('-'),'+',37('-'))
 3045 FORMAT(10X,'DUE TO',5X,'IV(7) =',F10.7,3X,'V(9) =',F10.7,&
                  /,10X,'REGRESSION I',/,21X,'I')
 3046 FORMAT(10X,'DEVIATION  IV(8) =',F10.7,&
                  /,11X,'FROM',6X,'I',/,10X,'REGRESSION I')
 3050 FORMAT(1X,/,/,3X,'*STATISTICS*',&
                /,/,18X,'STAT(I,1)',4X,'STAT(I,2)',4X,'STAT(I,3)',&
                      4X,'STAT(I,4)',4X,'STAT(I,5)',&
                  /,8X,'I    I',6X,'SUM',10X,'MEAN',&
                   8X,'SUM OF',6X,'VARIANCE',5X,'STANDARD',&
                  /,13X,'I',31X,'SQUARES',18X,'DEVIATION',&
                  /,5X,8('-'),'+',65('-'))
 3060 FORMAT(8X,I1,4X,'I',5F13.7)
      END
```

(d) 出力結果

```
**** INPUT DATA ****

    MX =  5     N =  5     M  =  3

      N I     Y    I              X
     ---+----------+----------------------------
      1 I   -1.000 I    2.000    1.000    3.000
      2 I    3.000 I    3.000   -1.000    0.000
      3 I    4.000 I   -2.000    0.000    2.000
      4 I    1.000 I    1.000   -2.000    2.000
      5 I   -1.000 I    3.000   -1.000    3.000

 *** OUTPUT ***

   IERR=   0

   *REGRESSION COEFFICIENT*

                          B(I,1)         B(I,2)         B(I,3)
           I    I          R.C.           S.E.           T-V.
        --------+-------------------------------------------------
           0    I       5.2055950      0.8979475      5.7972153
           1    I      -0.7442274      0.1916032     -3.8842112
           2    I       0.0386323      0.3714016      0.1040177
           3    I      -1.4702487      0.3410923     -4.3104124

       R(1)(MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT)          = 0.9852786
       R(2)(CONTRIBUTION RATIO)                        = 0.9707738
       R(3)(ADJUSTED MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT) = 0.9397315

  *ANALYSIS OF VARIANCE TABLE*

       FACTOR OF
       VARIATION  ISUM OF SQUARES     DEGREES OF FREEDOM
       -----------+------------------------------------
       TOTAL      IV(1) =20.8000000   V(4) =  4
                  I
       DUE TO     IV(2) =20.1920959   V(5) =  3
       REGRESSION I
                  I
       DEVIATION  IV(3) = 0.6079041   V(6) =  1
        FROM      I
       REGRESSION I


       FACTOR OF
       VARIATION  IUNBIASED VARIANCE     F-RATIO
       -----------+------------------------------------
       DUE TO     IV(7) = 6.7306986   V(9) =11.0719747
       REGRESSION I
                  I
       DEVIATION  IV(8) = 0.6079041
        FROM      I
       REGRESSION I

  *STATISTICS*

                   STAT(I,1)     STAT(I,2)     STAT(I,3)     STAT(I,4)     STAT(I,5)
      I    I         SUM           MEAN         SUM OF       VARIANCE      STANDARD
           I                                    SQUARES                    DEVIATION
    --------+-------------------------------------------------------------------
      1    I     7.0000000     1.4000000    17.2000000     4.3000000     2.0736441
      2    I    -3.0000000    -0.6000000     5.2000000     1.3000000     1.1401754
      3    I    10.0000000     2.0000000     6.0000000     1.5000000     1.2247449
      4    I     6.0000000     1.2000000    20.8000000     5.2000000     2.2803509
```

10.3 非線形回帰

10.3.1 DNNLPO 多項式回帰

(1) **機 能**

n 個の独立変数の値 x_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とそれに対応して与えられた n 個の従属変数の値 y_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられていて回帰のモデル

$$y_k = \beta_0 + \beta_1 x_k + \beta_2 {x_k}^2 + \cdots + \beta_m {x_k}^m + \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする. ここで, ε_k は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である.

このとき, 本サブルーチンは以下の情報を提供する.

(a) 偏回帰係数 β_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ の推定値 b_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$

(b) 回帰による分散分析表を作成するための諸統計量

	平方和	自由度	不偏分散	F 比
全変動	S_T	$n-1$		
回帰による変動	S_R	m	$V_R = \dfrac{S_R}{m}$	$F = \dfrac{V_R}{V_E}$
残差変動	$S_E = S_T - S_R$	$n-m-1$	$V_E = \dfrac{S_E}{n-m-1}$	

(c) 重相関係数 R

$$R = \sqrt{\frac{S_R}{S_T}}$$

(d) 自由度調整済み重相関係数 R^*

$$R^* = \sqrt{1 - \frac{(n-1)S_E}{(n-m-1)S_T}}$$

(e) 統計量 b_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$ の標準誤差推定値 ε_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$

(f) 帰無仮説 $H_0 : \beta_i = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ のもとで自由度 $n-m-1$ の t 分布に従う検定量 t_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DNNLPO (X, N, Y, M, B, R, V, STATX, STATY, IW1, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

なし

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型　I: { 32 ビット整数版では INTEGER(4) / 64 ビット整数版では INTEGER(8) }
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　　容
1	X	D	N	入 力	独立変量の観測値 x_k
2	N	I	1	入 力	観測値の数 n
3	Y	D	N	入 力	従属変量の観測値 y_i
4	M	I	1	入 力	多項式の次数 m
5	B	D	0:M, 3	出 力	B(i, 1):β_i の推定値 b_i B(i, 2): β_i の標準誤差推定値 ε_i B(i, 3):β_i の推定値の t 値 t_i $(i = 0, 1, \cdots, \mathrm{M})$
6	R	D	3	出 力	R(1):重相関係数 R R(2):寄与率 R^2 R(3):自由度調整済みの重相関係数 R^*
7	V	D	9	出 力	分散分析表を作成するための統計量 (注意事項 (a) 参照)
8	STATX	D	5	出 力	STATX (1) :独立変量の総和 STATX (2) :独立変量の平均 STATX (3) :独立変量の偏差平方和 STATX (4) :独立変量の分散 STATX (5) :独立変量の標準偏差
9	STATY	D	5	出 力	STATY (1) :従属変量の総和 STATY (2) :従属変量の平均 STATY (3) :従属変量の偏差平方和 STATY (4) :従属変量の分散 STATY (5) :従属変量の標準偏差
10	IW1	I	M+1	ワーク	作業領域
11	W1	D	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:**(M+1)×(M+4)
12	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) 制限条件

(a) $2 \leq \mathrm{M} + 1 < \mathrm{N}$

(5) エラーインディケータ

IERR の値	意　　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
1000	全体の平方和 $\leq$ 回帰の平方和	b_i と t_i に 0.0 をセットする.
2000	残差の不偏分散 $\geq$ 全体の不偏分散	R^* に 0.0 をセットする.
3000	制限条件 (a) を満足しなかった.	処理を打ち切る.
4000	逆行列が求められなかった.	

(6) 注意事項

(a) 配列 V には以下に示す様な 1 次元ベクトルが格納される.

1:	S_T	全変動
2:	S_R	回帰による変動
3:	S_E	残差変動
4:	$f_T = n - 1$	全変動の自由度
5:	$f_R = m$	回帰による変動の自由度
6:	$f_E = n - m - 1$	残差変動の自由度
7:	V_R	回帰による変動の不偏分散
8:	V_E	残差変動の不偏分散
9:	F	F 比

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値データ

X(1) =	1.0	Y(1) =	10.0
X(2) =	3.0	Y(2) =	20.0
X(3) =	5.0	Y(3) =	25.0
X(4) =	6.0	Y(4) =	26.0
X(5) =	8.0	Y(5) =	36.0
X(6) =	10.0	Y(6) =	62.0
X(7) =	11.0	Y(7) =	78.0
X(8) =	13.0	Y(8) =	107.0
X(9) =	14.0	Y(9) =	118.0
X(10) =	15.0	Y(10) =	127.0

から, 回帰分析を行い, 回帰係数, 重相関係数, 寄与率, および分散分析表, 基礎統計量を求める.

(b) 入力データ

観測値データ X, Y, N=10, M=4

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM BNNLPO
! *** EXAMPLE OF DNNLPO ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
!
      PARAMETER(N=10,M=4)
      DIMENSION X(10),Y(10),B(0:M,3)
      DIMENSION R(3),V(9),STATX(5),STATY(5)
      DIMENSION IW1(N+1),W1((N+1)*(N+4))
!
      READ(5,*) (X(I),I=1,N)
      READ(5,*) (Y(I),I=1,N)
      WRITE(6,1000) N,M
      WRITE(6,3000)
      DO 10 I=1,N
        WRITE(6,3100) I,X(I),Y(I)
   10 CONTINUE
      CALL DNNLPO(X,N,Y,M,B,R,V,STATX,STATY,IW1,W1,IERR)
      WRITE(6,4000) IERR
      WRITE(6,4010)
      WRITE(6,4020) (I,(B(I,J),J=1,3),I=0,M)
      WRITE(6,4040) (R(I),I=1,3)
      IV4=V(4)
      IV5=V(5)
      IV6=V(6)
      WRITE(6,4050)
      WRITE(6,4060) V(1),IV4
      WRITE(6,4070) V(2),IV5
      WRITE(6,4080) V(3),IV6
      WRITE(6,4090)
      WRITE(6,4100) V(7),V(9)
      WRITE(6,4110) V(8)
      WRITE(6,4120)
      WRITE(6,4130) (STATX(I),I=1,5)
      WRITE(6,4140) (STATY(I),I=1,5)
!
      STOP
!
 1000 FORMAT('  *** DNNLPO ***',/,/,'    ** INPUT DATA **',/,/,&
            4X,'N = ',I4,3X,'M = ',I4)
 3000 FORMAT(' ',/,4X,'OBSERVATION VALUE',/,/,5X,'N',11X,'X',18X,'Y')
 3100 FORMAT(4X,I2,3X,D16.9,3X,D16.9)
 4000 FORMAT(4X,'** OUTPUT **',/,/,4X,'IERR = ',I4)
 4010 FORMAT(/,/,4X,'*REGRESSION COEFFICIENT*',&
            /,/,21X,'B(I,1)',12X,'B(I,2)',12X,'B(I,3)',&
             /,8X,'I    I',8X,'R.C.',14X,'S.E.',14X,'T-V.',&
            /,5X,8('-'),'+',55('-'))
 4020 FORMAT(7X,I2,'    I',3D18.10)
 4030 FORMAT(11X,'CONSTANT','I',3D18.10)
 4040 FORMAT(' ',/,/,5X,'R(1)(MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT)',10X,&
                     '=',D18.10,&
            /,5X,'R(2)(CONTRIBUTION RATIO)',24X,'=',D18.10,&
            /,5X,'R(3)(ADJUSTED MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT) =',&
                     D18.10)
 4050 FORMAT(' ',/,/,4X,'*ANALYSIS OF VARIANCE TABLE*',&
            /,/,5X,'FACTOR OF',/,5X,'VARIATION',2X,'ISUM OF SQUARES',&
                13X,'DEGREES OF FREEDOM',/,5X,11('-'),'+',52('-'))
 4060 FORMAT(5X,'TOTAL',6X,'IV(1) =',D18.10,3X,'V(4) =',I3,/,16X,'I')
 4070 FORMAT(5X,'DUE TO',5X,'IV(2) =',D18.10,3X,'V(5) =',I3,&
                /,5X,'REGRESSION I',/,16X,'I')
```

```
4080 FORMAT(5X,'DEVIATION  IV(3) =',D18.10,3X,'V(6) =',I3,&
                /,6X,'FROM',6X,'I',/,5X,'REGRESSION I')
4090 FORMAT(' ',/,/,5X,'FACTOR OF',/,5X,'VARIATION',2X,&
                  'IUNBIASED VARIANCE',10X,'F-RATIO',&
                /,5X,11('-'),'+',52('-'))
4100 FORMAT(5X,'DUE TO',5X,'IV(7) =',D18.10,3X,'V(9) =',D18.10,&
                /,5X,'REGRESSION I',/,16X,'I')
4110 FORMAT(5X,'DEVIATION  IV(8) =',D18.10,&
                /,6X,'FROM',6X,'I',/,5X,'REGRESSION I')
4120 FORMAT(' ',/,/,4X,'*STATISTICS*',&
               /,/,8X,'I    I 1.SUM',8X,'2.MEAN',&
                  7X,'3.SUM OF',5X,'4.VARIANCE',3X,'5.STANDARD',&
                /,13X,'I',29X,'SQUARES',19X,'DEVIATION',&
                /,5X,8('-'),'+',65('-'))
4130 FORMAT(6X,'STATX  I',5(D13.6))
4140 FORMAT(6X,'STATY  I',5(D13.6))
!
     END
```

(d) 出力結果

```
*** DNNLPO ***

  ** INPUT DATA **

  N =   10   M =    4

  OBSERVATION VALUE

   N          X                   Y
   1    0.100000000D+01    0.100000000D+02
   2    0.300000000D+01    0.200000000D+02
   3    0.500000000D+01    0.250000000D+02
   4    0.600000000D+01    0.260000000D+02
   5    0.800000000D+01    0.360000000D+02
   6    0.100000000D+02    0.620000000D+02
   7    0.110000000D+02    0.780000000D+02
   8    0.130000000D+02    0.107000000D+03
   9    0.140000000D+02    0.118000000D+03
  10    0.150000000D+02    0.127000000D+03
  ** OUTPUT **

  IERR =    0


  *REGRESSION COEFFICIENT*

                  B(I,1)             B(I,2)             B(I,3)
      I    I       R.C.               S.E.               T-V.
   --------+-------------------------------------------------------
      0    I -0.4607861598D+01  0.1568666444D+01 -0.2937438751D+01
      1    I  0.1891301677D+02  0.3032062662D+01  0.6237673449D+01
      2    I -0.4973007854D+01  0.7643575879D+00 -0.6506127411D+01
      3    I  0.5505362721D+00  0.7155311132D-01  0.7694092709D+01
      4    I -0.1761845964D-01  0.2223941477D-02 -0.7922177728D+01


   R(1)(MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT)          =  0.9996471755D+00
   R(2)(CONTRIBUTION RATIO)                        =  0.9992944755D+00
   R(3)(ADJUSTED MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT) =  0.9993648262D+00


  *ANALYSIS OF VARIANCE TABLE*

   FACTOR OF
   VARIATION  ISUM OF SQUARES             DEGREES OF FREEDOM
   -----------+----------------------------------------------------
   TOTAL      IV(1) =  0.1743890000D+05   V(4) =  9
              I
   DUE TO     IV(2) =  0.1742659643D+05   V(5) =  4
   REGRESSION I
              I
   DEVIATION  IV(3) =  0.1230357206D+02   V(6) =  5
    FROM      I
   REGRESSION I


   FACTOR OF
   VARIATION  IUNBIASED VARIANCE          F-RATIO
   -----------+----------------------------------------------------
   DUE TO     IV(7) =  0.4356649107D+04   V(9) =  0.1770481405D+04
   REGRESSION I
              I
   DEVIATION  IV(8) =  0.2460714411D+01
    FROM      I
   REGRESSION I


  *STATISTICS*

      I    I 1.SUM        2.MEAN       3.SUM OF     4.VARIANCE   5.STANDARD
           I                             SQUARES                   DEVIATION
   --------+-----------------------------------------------------------------
    STATX  I 0.860000D+02 0.860000D+01 0.206400D+03 0.229333D+02 0.478888D+01
    STATY  I 0.609000D+03 0.609000D+02 0.174389D+05 0.193766D+04 0.440188D+02
```

10.3.2 DNNLGF, RNNLGF 任意の関数による回帰

(1) **機 能**

m 変数からなる n 個の独立変数の組 $\boldsymbol{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{mk})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ とそれに対応して与えられた n 個の従属変数の値 y_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられていて, 回帰のモデル

$$y_k = f(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_k \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

に従うとする. ここで, ε_k は独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う誤差項である.

このとき, 本サブルーチンは以下の情報を提供する.

(a) 回帰モデルの ℓ 個のパラメータ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\ell)$ の推定値 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_\ell)$

(b) この回帰モデルに対して, 分散分析を行うために必要な諸統計量

	平方和	自由度	不偏分散
全変動	S_T	n	
残差変動	S_E	$n-\ell$	$V_E = \dfrac{S_E}{n-\ell}$

(c) 漸近的分散共分散行列 $V = (V_{ij})$ $(i, j = 1, \cdots, \ell)$

(d) 統計量 b_i $(i = 1, \cdots, \ell)$ の標準誤差推定値 ε_i $(i = 1, \cdots, \ell)$

(2) **使用法**

倍精度サブルーチン:

CALL DNNLGF (F, XD, NA, NN, NM, YD, NL, ER, NEV, X, XE, Y, C, NV, V, STAT, IW1, W1, IERR)

単精度サブルーチン:

CALL RNNLGF (F, XD, NA, NN, NM, YD, NL, ER, NEV, X, XE, Y, C, NV, V, STAT, IW1, W1, IERR)

(3) 引 数

D:倍精度実数型　Z:倍精度複素数型
R:単精度実数型　C:単精度複素数型

I: $\left\{ \begin{array}{l} \text{32 ビット整数版では INTEGER(4)} \\ \text{64 ビット整数版では INTEGER(8)} \end{array} \right\}$

項番	引数名	型	大きさ	入出力	内　容
1	F	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	−	入 力	回帰モデル $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})$ を定義する関数 F(X, B) の関数副プログラム名
2	XD	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	NA,NM	入力	独立変量の観測値 $\boldsymbol{x}_k$ (注意事項 (a) 参照)
3	NA	I	1	入 力	配列 X の整合寸法
4	NN	I	1	入 力	観測値の数 n
5	NM	I	1	入 力	独立変数の数 m
6	YD	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	NN	入 力	従属変量の観測値 y_i
7	NL	I	1	入 力	回帰モデルの関数 $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\beta})$ のパラメータ数 ℓ
8	ER	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	1	入 力	要求精度 (既定値:2×$\sqrt{\text{(誤差判定のための単位)}}$)
9	NEV	I	1	入 力	関数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})$ の最大評価回数 n (既定値:100×NN×NL)
				出 力	実際の評価回数
10	X	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	NL	入 力	β_i の初期値
				出 力	β_i の推定値 b_i $(i =, 1, \cdots, \text{NL})$
11	XE	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	NL	出 力	β_i の標準誤差推定値 ε_i $(i = 1, \cdots, \text{NL})$
12	Y	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	NN	出 力	最小自乗解に対する関数値 $f(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{b})$
13	C	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	NV,NL	出 力	回帰モデルのパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ に対する漸近的分散共分散行列 V
14	NV	I	1	入 力	配列 CV の整合寸法
15	V	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	5	出 力	分散分析表を作成するための統計量 (注意事項 (c) 参照)
16	STAT	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	NL+1,5	出 力	計算結果の基礎統計量 (注意事項 (b) 参照)
17	IW1	I	$4 \times$ NL	ワーク	作業領域
18	W1	$\left\{\begin{array}{c}\text{D}\\\text{R}\end{array}\right\}$	内容参照	ワーク	作業領域 **大きさ:** NN $\times$ (2 $\times$ NL + 1) + NL $\times$ (NL + 4)
19	IERR	I	1	出 力	エラーインディケータ

(4) **制限条件**

(a) $0 < \mathrm{NN} \leq \mathrm{NA}$

(b) $0 < \mathrm{NL} \leq \mathrm{NV}$

(c) $\mathrm{NM} > 0$

(d) $2 \leq \mathrm{NL} + 1 < \mathrm{NN}$

(5) **エラーインディケータ**

IERR の値	意　　　味	処　理　内　容
0	正常終了.	
3000	制限条件 (a)~(d) のいずれかを満足しなかった.	処理を打ち切る.
4000	線形最小二乗法が解けなかった.	その時点での X, Y, STAT および V を計算して出力する.
4100	最急降下解を計算できなかった.	
4200	2NN 回連続して解の修正ができなかった.	
4300	逆行列が求められなかった.	
5000	最大評価回数までに解が求められなかった.	

(6) **注意事項**

(a) 観測値データ x_{ki} $(k = 1, 2, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, m)$, は実行列 (2 次元配列型) として以下のように配列 XD に格納する. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,m} \\ x_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

(b) 配列 STAT には以下に示す様な実行列 (2 次元配列型) が格納される. (格納形式については付録 A.2.1 を参照)

$$\begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{k1} & \mu_1 & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k1}-\mu_1)^2 & \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k1}-\mu_1)^2}{n-1} & \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k1}-\mu_1)^2}{n-1}} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{k2} & \mu_2 & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k2}-\nu)^2 & \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k2}-\mu_2)^2}{n-1} & \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k2}-\mu_2)^2}{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{km} & \mu_1 & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{km}-\nu)^2 & \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{km}-\mu_m)^2}{n-1} & \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{km}-\mu_m)^2}{n-1}} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k & \nu & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(y_k-\nu)^2 & \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(y_k-\nu)^2}{n-1} & \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(y_k-\nu)^2}{n-1}} \end{bmatrix}$$

ここで μ_i と ν は以下のように定義される.

$$\mu_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{ki}}{n}$$

$$\nu = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n}$$

(c) 配列 V には以下に示す様な 1 次元ベクトルが格納される.

1:	S_T	全変動
2:	S_E	残差変動
3:	$f_T = n$	全変動の自由度
4:	$f_E = n - \ell$	残差変動の自由度
5:	V_E	残差変動の不偏分散

(d) 引数第 1 項 F の実際の名前は, 使用者側のプログラムで EXTERNAL 文を用いて宣言し, 実際の名前の関数副プログラムを作っておかなければならない. この関数副プログラムの作り方は次に示すとおりである.
関数副プログラムの作り方

```
REAL(8) FUNCTION  F(X, B)
REAL(8)  B, X
DIMENSION  B(*), X(*)
    F = f(x, b) (X と係数 B(i) の式)
RETURN
END
```

(e) 収束判定は次式によって行い, $\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}$ を解とする.

$$\|\Delta\boldsymbol{b}\| \leq \mathrm{ER} \times \max(1, \|\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}\|)$$

ここで, $\Delta\boldsymbol{b}$ は$\boldsymbol{b}$に対する修正ベクトルであり, $\|\boldsymbol{b}\| = \max|b_i|$ である.
ER としては, 既定値程度にとるのが望ましい.

(f) 引数の内容の欄に既定値が記されている場合は, 整数型のときは 0 以下の整数, 実数型のときは 0.0 以下の実数を入力すれば既定値がセットされる.

(7) **使用例**

(a) 問 題

観測値データ

$$(x_{ki}|y_k) = \left[\begin{array}{rrr|r} -2.0 & -2.0 & -1.0 & 2.7 \\ -1.5 & -1.5 & -1.0 & 2.9 \\ -1.0 & -1.0 & -1.0 & 3.1 \\ -0.5 & -1.0 & -1.5 & 3.4 \\ -0.5 & -1.5 & 1.0 & 3.9 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.7 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 & 6.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 & 7.8 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 7.9 \\ 1.5 & 1.5 & 1.0 & 6.3 \\ 1.5 & 2.0 & 1.5 & 5.2 \end{array}\right]$$

から, 回帰のモデル

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\beta}) = \frac{\beta_3\beta_2^2}{(x_1+x_2+x_3-\beta_1)^2+\beta_2^2} + \beta_4 + \beta_5(x_1+x_2+x_3)$$

による回帰分析を行い, 回帰のパラメータの推定値と推定誤差, 漸近的分散共分散行列, 分散分析表, 基礎統計量を求める.

(b) 入力データ

観測値データ XD, YD, $\mathrm{NN}=11, \mathrm{NM}=3, \mathrm{NL}=5, \mathrm{NEV}=0$,

回帰のパラメータの初期値 X, $\mathrm{NEV}=0, \mathrm{ER}=0.0$

(c) 主プログラム

```
      PROGRAM BNNLGF
! *** EXAMPLE OF DNNLGF ***
      IMPLICIT REAL(8) (A-H,O-Z)
      PARAMETER (L = 5, N = 11, NA = 20, M = 3, NV = 5)
      DIMENSION IWK(4*L)
      DIMENSION A(5),AE(5),YF(N),WK(N*(2*L+1)+L*(L+4))
      DIMENSION X(NA,M),Y(N),V(5),C(NV,L),STAT(M+1,5)
      EXTERNAL FNDANL
!
      WRITE(6,1000)
      DO 100 I = 1,N
         READ(5,*) (X(I,J),J=1,M),Y(I)
  100 CONTINUE
      READ(5,*) NEV
      READ(5,*) ER
      READ(5,*) (A(I),I=1,L)
      WRITE(6,1100) N,M,L,NEV,ER
      DO 110 I = 1,N
         WRITE(6,1200) (X(I,J),J=1,M),Y(I)
  110 CONTINUE
      WRITE(6,1300) (I,A(I),I=1,L)
      CALL DNNLGF&
      (FNDANL,X,NA,N,M,Y,L,ER,NEV,A,AE,YF,C,NV,V,STAT,IWK,WK,IERR)
      WRITE(6,1400) &
      IERR,NEV,(I,A(I),I=1,L),(I,AE(I),I=1,L),(I,YF(I),I=1,N),&
      ((C(I,J),J=1,L),I=1,L),(I,V(I),I=1,5),&
      (I,(STAT(I,J),J=1,5),I=1,M),(STAT(M+1,J),J=1,5)
!
 1000 FORMAT(' ',/,' *** DNDANL ***')
 1100 FORMAT('  ** INPUT **',/,&
             5X,'N      =',I5,/,&
             5X,'M      =',I5,/,&
             5X,'L      =',I5,/,&
             5X,'NEV    =',I5,/,&
             5X,'ER     =',D18.10)
 1200 FORMAT(5X,'(( COORDINATES  (X,Y) ))',/,&
            (5X,3(2X,F5.1),4X,F5.1))
 1300 FORMAT(5X,'(( INITIAL VALUE OF COEFFICIENTS ))',/,&
            (5X,'   A(',I2,')  =',F5.1))
 1400 FORMAT('  ** OUTPUT **',/,&
             5X,'IERR   =',I5,/,&
             5X,'NEV    =',I5,/,&
             5X,'(( OPTIMIZED COEFFICIENTS ))',/,&
           5(5X,'   A(',I2,') =',D18.10,/),&
             5X,'(( ESTIMATED ERROR OF COEFFICIENTS ))',/,&
```

```
           5(5X,'   AE(',I2,') =',D18.10,/),&
             5X,'(( FUNCTION VALUE ))',/,&
          11(5X,'   YF(',I2,') =',D18.10,/),&
             5X,'(( ASYPTOTIC VARIANCE-COVARIANCE MATRIX ))',/,&
           5(5X,5(D11.3,1X),/),&
             5X,'(( ANALISYS OF VARIANCE TABLE ))',/,&
           5(5X,'   V(',I2,')  =',D18.10,/),&
             5X,'(( STATISTICS ))',/,&
           3(5X,'   X(',I2,')  :',5(D11.3,1X),/),&
             5X,'   Y       :',5(D11.3,1X))
      END


      REAL(8) FUNCTION FNDANL(X,A)
      REAL(8) X,A,F1,F2
      DIMENSION A(*),X(*)
      REAL(8) R
!
      R = X(1) + X(2) +X(3)
      F1 = A(3)*A(2)*A(2)/((R-A(1))*(R-A(1))+A(2)*A(2))
      F2 = A(4)+A(5)*R
      FNDANL = F1+F2
      RETURN
      END
```

(d) 出力結果

```
*** DNDANL ***
 ** INPUT **
    N      =   11
    M      =    3
    L      =    5
    NEV    =    0
    ER     =  0.0000000000D+00
    (( COORDINATES (X,Y) ))
       -2.0   -2.0   -1.0      2.7
    (( COORDINATES (X,Y) ))
       -1.5   -1.5   -1.0      2.9
    (( COORDINATES (X,Y) ))
       -1.0   -1.0   -1.0      3.1
    (( COORDINATES (X,Y) ))
       -0.5   -1.0   -1.5      3.4
    (( COORDINATES (X,Y) ))
       -0.5   -1.5    1.0      3.9
    (( COORDINATES (X,Y) ))
        0.0    0.0    0.0      4.7
    (( COORDINATES (X,Y) ))
        0.5    0.3    0.3      6.0
    (( COORDINATES (X,Y) ))
        0.5    1.0    0.5      7.8
    (( COORDINATES (X,Y) ))
        1.0    1.0    1.0      7.9
    (( COORDINATES (X,Y) ))
        1.5    1.5    1.0      6.3
    (( COORDINATES (X,Y) ))
        1.5    2.0    1.5      5.2
    (( INITIAL VALUE OF COEFFICIENTS ))
       A( 1)  =  0.0
       A( 2)  =  1.0
       A( 3)  =  6.0
       A( 4)  =  3.5
       A( 5)  =  0.2
 ** OUTPUT **
    IERR   =    0
    NEV    =  902
    (( OPTIMIZED COEFFICIENTS ))
       A( 1) =  0.2486789111D+01
       A( 2) =  0.1745170205D+01
       A( 3) =  0.4861744252D+01
       A( 4) =  0.3073046191D+01
       A( 5) =  0.1132194723D+00
    (( ESTIMATED ERROR OF COEFFICIENTS ))
       AE( 1) =  0.1051397452D+00
       AE( 2) =  0.3165868493D+00
       AE( 3) =  0.5230434840D+00
       AE( 4) =  0.4125090217D+00
       AE( 5) =  0.6950610080D-01
    (( FUNCTION VALUE ))
       YF( 1) =  0.2757500684D+01
       YF( 2) =  0.2948308621D+01
       YF( 3) =  0.3180048686D+01
       YF( 4) =  0.3180048686D+01
       YF( 5) =  0.3933760271D+01
       YF( 6) =  0.4677319147D+01
       YF( 7) =  0.6003344734D+01
       YF( 8) =  0.7810268963D+01
       YF( 9) =  0.7887470677D+01
       YF(10) =  0.6301151442D+01
       YF(11) =  0.5220777954D+01
    (( ASYPTOTIC VARIANCE-COVARIANCE MATRIX ))
      0.111D-01    0.183D-01    0.315D-01  -0.254D-01  -0.491D-02
      0.183D-01    0.100D+00    0.115D+00  -0.120D+00  -0.182D-01
      0.315D-01    0.115D+00    0.274D+00  -0.191D+00  -0.321D-01
     -0.254D-01   -0.120D+00   -0.191D+00   0.170D+00   0.261D-01
     -0.491D-02   -0.182D-01   -0.321D-01   0.261D-01   0.483D-02
    (( ANALISYS OF VARIANCE TABLE ))
       V( 1)  =  0.3001500000D+03
       V( 2)  =  0.6278727310D-01
       V( 3)  =  0.1100000000D+02
       V( 4)  =  0.8000000000D+01
```

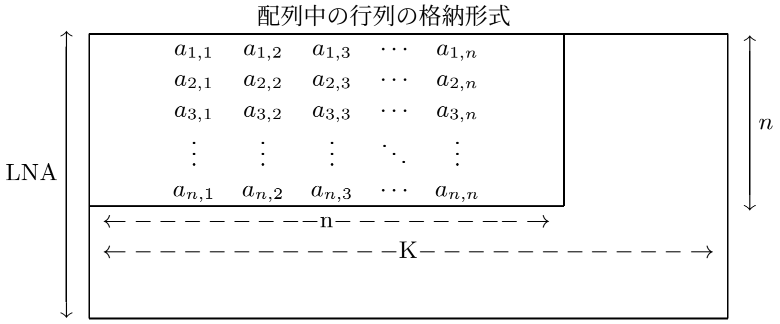
```
     V( 5)  =  0.7848409138D-02
  (( STATISTICS ))
     X( 1)  : -0.500D+00  -0.455D-01   0.137D+02   0.137D+01   0.117D+01
     X( 2)  : -0.125D+01  -0.114D+00   0.187D+02   0.187D+01   0.137D+01
     X( 3)  :  0.750D+00   0.682D-01   0.108D+02   0.108D+01   0.104D+01
     Y      :  0.539D+02   0.490D+01   0.360D+02   0.360D+01   0.190D+01
```

付 録 A　配列データの取扱い方法

A.1　行列に対応した配列データ

本ライブラリにおいては, しばしば行列に対応した配列データが使用されるが, 以下にその取扱い方法を述べる. 配列データを使用するサブルーチンを引用する場合, 利用者は引用する側のプログラム内で, その配列を宣言しておかなければならない. 宣言された配列を A (LNA, K) とすると, $n \times n$ 型行列 $A = (a_{i,j})$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ は次の図のように格納される. この時の LNA を**整合寸法**という. 行列に対応した配列を引数として使用する場合に

図 A−1　配列中の行列の格納形式



備　考

a.　LNA$\geq n$, K$\geq n$ でなければならない.

b.　行列の要素 $a_{i,j}$ は配列の要素 A(i, j) に対応する.

は, 引数として配列名, 次数のほかに, この整合寸法もサブルーチンに引渡さなければならない. これは, 行列の要素 $a_{i,j}$ $(i = 1, 2, \cdots,$LNA$;\ j = 1, 2, \cdots,$K$)$ は, 配列の要素 A(i, j) (i=1, 2, ⋯, LNA; j=1, 2, ⋯, K) と次のように主記憶上で対応している必要があるためである.

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$\cdots$	$a_{\mathrm{LNA},1}$	$a_{1,2}$	$a_{2,2}$	$\cdots$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\cdots$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\cdots$
A(1, 1)	A(2, 1)	$\cdots$	A(LNA, 1)	A(1, 2)	A(2, 2)	$\cdots$

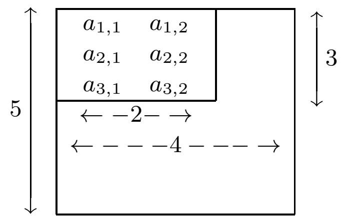
例 DAM1AD(実行列の和) の場合

3×2 型行列 A, B の和を行列 C に求めるとする. 対応する配列 A, B, C の大きさをすべて (5, 4) で宣言すると, 宣言文および CALL 文は次のようになる.

```
      REAL(8) A(5, 4), B(5, 4), C(5, 4)
      INTEGER IERR
!
      CALL DAM1AD(A, 5, 3, 2, B, 5, C, 5, IERR)
```

配列 A には, データが次のように格納される. 配列 B, C についても同様である.

図 A–2　配列 A 中の格納形式



次数の異なるいくつかの配列をデータとして取り扱う場合には, そのうち最も大きな次数を LNA とするような配列を一つ用意しておけば, この配列を逐次利用することができる. ただし, この時, 整合寸法として常に LNA の値を与える必要がある.

A.2 データの格納方法

行列データの格納方法は, その行列の型によって異なっている. 以下にその方法を示す.

A.2.1 実行列 (2 次元配列型)

図 A−3 実行列 (2 次元配列型) の格納形式

格納する行列

$$\begin{array}{|ccccc|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

配列A(LNA, K)の格納状態

$$\text{LNA} \quad \begin{array}{|ccccc|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \\ \hline \end{array} \quad \text{N}$$

←−−−−−−N−−−−−−→

←−−−−−−−−K−−−−−−−−→

備 考

a. LNA ≥ N, K ≥ N を満たさなければならない.

A.2.2 実対称行列, 正値対称行列

(1) **2 次元配列型, 上三角型**

図 A−4 実対称行列 (2 次元配列型)(上三角型) の格納形式

格納する行列

$$\begin{array}{|ccccc|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

配列A(LNA, K)の格納状態

$$\text{LNA} \quad \begin{array}{|ccccc|} \hline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ * & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ * & * & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ * & * & * & a_{4,4} & a_{4,5} \\ * & * & * & * & a_{5,5} \\ \hline \end{array} \quad \text{N}$$

←−−−−−−N−−−−−−→

←−−−−−−−−K−−−−−−−−→

備 考

a. ∗ は, 任意の値であることを示す.

b. LNA ≥ N, K ≥ N を満たさなければならない.

付 録 B　ASL で使用している計算機依存定数

B.1　誤差判定のための単位

ASL では, 浮動小数点演算における誤差判定のための単位として次の値を設定している. 誤差判定のための単位は, 浮動小数点データの内部表現によって決まる数値であり, ASL ではこの単位を収束判定, 零判定などに用いることがある.

表 B–1　誤差判定のための単位

単精度演算	倍精度演算
$2^{-23}(\simeq 1.19 \times 10^{-7})$	$2^{-52}(\simeq 2.22 \times 10^{-16})$

備考 誤差判定の単位 ε はマシン ε と呼ばれることもあり, 通常, 対応する浮動小数点形式で $1+\varepsilon$ の計算結果が 1 と異なるような最小の正の定数として定義される. したがって, 誤差判定の単位を見れば, その浮動小数点形式での (仮数部の) 演算の最大有効桁数がわかる.

B.2　浮動小数点データの値の最大値・最小値

ASL の内部で定義している浮動小数点データの値の最大値, 最小値を以下に示す.
なお, 以下の最大値, 最小値はハードウェアが実際に採用している浮動小数点形式のそれとは異なる場合があるので注意されたい.

表 B–2　浮動小数点データの値の最大値・最小値

	単精度演算	倍精度演算
最大値	$2^{127}(2-2^{-23})$ $(\simeq 3.40 \times 10^{38})$	$2^{1023}(2-2^{-52})$ $(\simeq 1.80 \times 10^{308})$
正の最小値	2^{-126} $(\simeq 1.17 \times 10^{-38})$	2^{-1022} $(\simeq 2.23 \times 10^{-308})$
負の最大値	-2^{-126} $(\simeq -1.17 \times 10^{-38})$	-2^{-1022} $(\simeq -2.23 \times 10^{-308})$
最小値	$-2^{127}(2-2^{-23})$ $(\simeq -3.40 \times 10^{38})$	$-2^{1023}(2-2^{-52})$ $(\simeq -1.80 \times 10^{308})$

索 引

アプリケーションシステム

科学技術計算ライブラリ

ASL ユーザーズガイド

〈基本機能編 第 6 分冊〉

2023 年 3 月 ASL (1.1)
付属説明書 3.0.0-230301

日 本 電 気 株 式 会 社